

Extremalpunktmethoden bei Koeffizientenproblemen

von
Bernd Anger
aus
Wilhelmshaven

Extremalpunktmethoden bei Koeffizientenproblemen

Der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

zur

Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt

von

Bernd Anger

aus

Wilhelmshaven

Als Dissertation genehmigt
von der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Erlangen-Nürnberg.



Tag der mündlichen Prüfung: 23.7.1969

Dekan: Prof.Dr.H.Wegener

Erstberichterstatter: Prof.Dr.H.Bauer

Zweitberichterstatter: Prof.Dr.K.Jacobs

Inhalt

	Seite
Einleitung	1
§ 1 Koeffizientenprobleme für holomorphe Funktionen	4
§ 2 Koeffizienten- und Momentenproblem	12
§ 3 Eine algebraische Lösung des Koeffi- zientenproblems	19
§ 4 Extremalpunktmethoden	26
§ 5 Charakterisierung der Extremalpunkte	32
§ 6 Multiplikative Extremalpunkte	44
Literaturverzeichnis	57



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546302_0034

Einleitung

Carathéodory untersuchte 1911 die Frage, wie man gewisse Eigenschaften einer im Einheitskreis holomorphen Funktion - etwa beschränkt zu sein oder einen positiven Realteil zu besitzen - durch Bedingungen kennzeichnen kann, denen die Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung einer solchen Funktion genügen müssen. Toeplitz und später Schur benutzten algebraische und funktionentheoretische Methoden zur Lösung derartiger "Koeffizientenprobleme". Carathéodory betrachtete für holomorphe Funktionen mit vorgegebenen Eigenschaften die konvexen Körper der "geometrischen Repräsentanten", d.h. der als Koeffizienten von Potenzreihenentwicklungen dieser Funktionen auftretenden geordneten Tupel komplexer Zahlen.

Bei der Lösung von Integralgleichungen fand F. Riesz einen Zusammenhang zwischen dem funktionentheoretischen Fragenkreis der Koeffizientenprobleme und maßtheoretischen Momentenproblemen. Schließlich gelang es Herglotz, für die im Einheitskreis holomorphen Funktionen mit positivem Realteil eine Integraldarstellung zu finden, die eng mit dem Bochnerschen Satz über die Darstellbarkeit positiv definiter Funktionen als Fouriertransformierte zusammenhängt.

In der Theorie der holomorphen Funktionen von mehreren Variablen erhielt Pfister [1] ⁽⁺⁾ 1961 eine algebraische Lösung des Koeffizientenproblems für die im Polyzylinder beschränkten Funktionen, die das Ergebnis von Schur verallgemeinert.

Im Gegensatz zu den von Pfister angewandten algebraischen und funktionentheoretischen Methoden wird in dieser Arbeit eine Lösung von Koeffizientenproblemen auf funktionalanalytischer Grundlage angestrebt. Ähnlich wie bei Carathéodory spielen auch hier Hilfsmittel aus der Theorie konvexer Mengen eine wichtige Rolle.

⁽⁺⁾ Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis.

Es sollen holomorphe Funktionen von n Veränderlichen betrachtet werden, die auf dem Einheitspolyzylinder im $\mathbb{T}^n$ definiert sind. Das Koeffizientenproblem für die beschränkten Funktionen wird in § 1 auf das entsprechende Problem für die Menge F aller im Nullpunkt zu 1 normierten holomorphen Funktionen mit positivem Realteil zurückgeführt.

In § 2 wird eine von Korányi und Pukánszky [1] angegebene Integraldarstellung für holomorphe Funktionen mit positivem Realteil näher untersucht, die für den Fall der Funktionen von einer Veränderlichen gerade den Satz von Herglotz (2.5.) als Beispiel einer Choquetschen Integraldarstellung für die Menge F liefert.

Ähnlich wie bei F. Riesz für den Fall $n=1$ ergibt sich ein Zusammenhang zwischen dem Koeffizienten- und einem Momentenproblem (2.8.). Man gewinnt einen Isomorphismus zwischen der Menge F holomorpher Funktionen, einer Menge M von Darstellungsmaßen für F auf dem n -dimensionalen Torus und einer Menge P positiv definiter Funktionen auf $\mathbb{Z}^n$.

Dieses Resultat wird in § 3 für eine algebraische Lösung des Koeffizientenproblems ausgenutzt, die für den Fall einer Variablen bei Schur [1] zu finden ist (3.3.). Insbesondere ergibt sich ein neuer (funktionalanalytischer) Beweis der von Pfister erhaltenen Lösung des Koeffizientenproblems für die beschränkten holomorphen Funktionen (3.8.).

Aus dem Satz von Krein-Milman, angewandt auf die konvexe, kompakte Menge F der normierten holomorphen Funktionen mit positivem Realteil, wird in § 4 ein Kriterium (4.2.) hergeleitet, anhand dessen man bei Kenntnis der Koeffizienten der extremalen (+) Funktionen entscheiden kann, ob eine formale Potenzreihe eine holomorphe Funktion aus F definiert.

(+) Ein Punkt g einer konvexen Menge G heißt extremal, wenn er sich nicht als Konvexkombination $g = \beta g_1 + (1-\beta)g_2$ zweier verschiedener Punkte $g_1, g_2 \in G$ (mit $0 < \beta < 1$) darstellen läßt.

Für den Fall einer Variablen lassen sich die Extremalpunkte von F einfach beschreiben, so daß man aus dem Kriterium (4.2.) die von Carathéodory angegebene Lösung des Koeffizientenproblems für F erhält (4.7.).

In den beiden letzten Abschnitten wird untersucht, ob sich die Koeffizienten der extremalen Funktionen aus F auf einfache Weise kennzeichnen lassen.

§ 5 bringt eine Charakterisierung der extremalen Darstellungsmaße für F (5.2.), welche die Berechnung gewisser extremaler Funktionen gestattet (5.8.).

Aufgrund der Isomorphie zwischen der Menge F und einer Menge P positiv definiter Funktionen sind zur Lösung des Koeffizientenproblems die Extremalpunkte von P zu bestimmen. § 6 beschäftigt sich mit "multiplikativen" Extremalpunkten dieser Menge. Sie lassen sich durch eine Reihe äquivalenter Eigenschaften kennzeichnen (6.5.) und führen zur Bestimmung extremaler holomorpher Funktionen mit positivem Realteil (6.12.). Die Frage, ob sich alle Extremalpunkte von P durch derartige Multiplikativitätseigenschaften charakterisieren lassen, kann bisher nicht beantwortet werden.

In einem abschließenden Satz (6.15.) wird gezeigt, daß im Falle mehrerer Variablen die Extremalpunktmenge von F wesentlich komplizierter als im Falle einer Veränderlichen ist. Unter der Voraussetzung, daß sich die Frage nach der Multiplikativität aller Extremalpunkte von P positiv entscheiden läßt, gewinnt man jedoch auch für Funktionen mehrerer Variablen eine relativ einfache Lösung des Koeffizientenproblems durch Extremalpunktmethoden.

Die Anfertigung dieser Arbeit wurde durch die Stiftung Volkswagenwerk finanziell unterstützt.

Für kritische Gespräche möchte ich den Herren K. Janßen und J. Lembcke vom Mathematischen Institut danken, ganz besonders aber meinem verehrten Lehrer Herrn Prof. Dr. H. Bauer für viele wertvolle Anregungen zu dieser Arbeit sowie für seine langjährige Förderung.

§ 1 Koeffizientenprobleme für holomorphe Funktionen

In diesem Abschnitt werden holomorphe Funktionen von n Veränderlichen betrachtet, deren Definitionsbereich der Einheitspolyzyylinder im $\mathbb{C}^n$ ist ⁽¹⁾.

(1.1.) DEFINITION

X_1 bzw. $\overline{X_1}$ sei die offene bzw. abgeschlossene Einheitskreisscheibe in $\mathbb{C}$:

$$X_1 := \{x_1 \in \mathbb{C} : |x_1| < 1\}, \quad \overline{X_1} := \{x_1 \in \mathbb{C} : |x_1| \leq 1\}.$$

$Y_1 := \{y_1 \in \mathbb{C} : |y_1| = 1\}$ ist der topologische Rand von X_1 in $\mathbb{C}$.

Als (offener) Einheitspolyzyylinder im $\mathbb{C}^n$ werde die Menge

$$X := \prod_{i=1}^n X_i \quad (\text{mit } X_i := X_1 \text{ für } i=1, \dots, n) \text{ bezeichnet.}$$

Ferner sei $Y := \prod_{i=1}^n Y_i$ (mit $Y_i := Y_1$ für $i=1, \dots, n$) der Torus in $\mathbb{C}^n$.

(1.2.) BEZEICHNUNGEN

Y_1 und Y sind kompakte topologische Gruppen (in der Topologie von $\mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{C}^n$, mit komponentenweiser Multiplikation als Gruppenoperation). σ_1 bzw. σ bezeichne das normierte Haarsche Maß auf Y_1 bzw. auf Y :

Für eine stetige, komplexwertige Funktion g auf Y_1 ist

$$\int g(y_1) \sigma_1(dy_1) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(e^{i\theta}) d\theta.$$

σ ist das Produktmaß der n Haarschen Maße σ_1 .

Man prüft leicht nach, daß σ wie folgt charakterisiert werden kann:

Für $m := (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$ und $u := (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{C}^n$ sei

$$u_m := u_1^{m_1} \cdots u_n^{m_n}, \text{ soweit dies sinnvoll ist.}$$

⁽¹⁾ Die Mengen der natürlichen, ganzen, reellen bzw. komplexen Zahlen werden mit $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ bezeichnet. Es sei $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $\mathbb{N}_0^n := (\mathbb{N}_0)^n$.

p_m bezeichne die Abbildung

$p_m: Y \rightsquigarrow Y^m$ von Y in Y_1 .

Dann ist σ das einzige Wahrscheinlichkeitsmaß auf Y , das alle von 1 verschiedenen Monome p_m ($0 \neq m \in \mathbb{Z}^n$) annulliert.

Bezeichnet J die Menge $\mathbb{Z}^n$ oder $\mathbb{N}_0^n$ und ist $(a_j)_{j \in J}$ eine Familie komplexer Zahlen sowie M eine Menge positiver Radonmaße auf dem Torus Y , so versteht man unter einem Momentenproblem für M die Frage, ob ein Maß $\mu \in M$ existiert, so daß die Momente

$\int Y^j \mu(dy) = \mu(p_j)$ gerade die Zahlen a_j sind.

Abkürzend soll von einem Momentenproblem

$a_j = \mu(p_j) \quad (j \in J)$

(bzgl. M) gesprochen und μ als Lösung dieses Problems bezeichnet werden, wenn μ in M liegt.

(1.3.) DEFINITION

Mit $C(X)$ werde die Menge aller auf X stetigen, komplexwertigen Funktionen bezeichnet. $C(X)$ sei mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Teilmengen von X versehen.

(1.4.) BEMERKUNG

$C(X)$ wird als lokal-konvexer Hausdorff-Raum über $\mathbb{R}$ aufgefaßt, dessen Topologie durch eine Folge von Halbnormen definiert wird und folglich metrisierbar ist.

(1.5.) DEFINITION

Mit $A := A(X)$ werde die Menge aller holomorphen Funktionen auf X bezeichnet. A ist abgeschlossen in $C(X)$.

Die Menge derjenigen holomorphen Funktionen, die im Nullpunkt verschwinden und deren Betrag durch 1 beschränkt ist, heiße

$$\underline{B} := B(X) := \{ b \in A : b(0) = 0, |b(x)| \leq 1 \text{ für alle } x \in X \}.$$

$$\underline{F} := F(X) := \{ f \in A : f(0) = 1, \operatorname{Re} f(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in X \}$$

sei die Menge der normierten holomorphen Funktionen mit positivem Realteil, und

$$\underline{H} := H(X) \text{ bezeichne die Menge } \{ \operatorname{Re} f : f \in \underline{F} \}.$$

Im Falle $n=1$ einer Variablen ist H die Menge aller normierten harmonischen Funktionen in X (vgl. Cartan [1], Kap. IV.3.2.).

Auf $\mathbb{Z}^n$ bedeute " $\leq$ " die komponentenweise Ordnung:

$j := (j_1, \dots, j_n) \leq m := (m_1, \dots, m_n)$ gelte genau dann, wenn für alle $k=1, \dots, n$ $j_k \leq m_k$ ist. $j < m$ bedeute $j \leq m$ und $j \neq m$.

Unter einer Summe über alle $j \leq m$ bzw. alle j mit $m \leq j \leq k$ sei stets die Summation über alle $j \in \mathbb{Z}^n$ mit den entsprechenden Eigenschaften verstanden.

Ist $a \in A$, so werden die Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung von a mit $(a_m)_{m \in \mathbb{N}_0^n}$ bezeichnet:

Für alle $x \in X$ ist

$$a(x) = \sum_{m \in \mathbb{N}_0^n} a_m x^m \quad \text{absolut summierbar.}$$

Ist $(a_m)_{m \in \mathbb{N}_0^n}$ eine Familie komplexer Zahlen und $G \subset A(X)$ eine Menge holomorpher Funktionen, so soll unter einem Koeffizientenproblem für G die Frage verstanden werden, ob eine Funktion aus G existiert, die in X eine Potenzreihenentwicklung $\sum_{m \geq 0} a_m x^m$ mit den Koeffizienten $(a_m)_{m \in \mathbb{N}_0^n}$ besitzt.

Abkürzend soll von einem Koeffizientenproblem

$$a: x \rightsquigarrow \sum_{m \geq 0} a_m x^m \quad (x \in X)$$

(bzgl. G) gesprochen und a als Lösung dieses Problems bezeichnet werden, wenn a in G liegt.

Den Zusammenhang zwischen den Mengen B, F und H liefert der
(1.6.) SATZ

B, F und H sind konvexe, kompakte Teilmengen von $C(X)$.

Die Abbildung

$b \rightsquigarrow \frac{1+b}{1-b}$ ist ein Homöomorphismus von B auf F.

Fund H sind algebraisch und topologisch isomorph ⁽¹⁾
vermöge der Abbildung

$f \rightsquigarrow \operatorname{Re} f$ von F auf H.

Beweis:

(1) Man prüft leicht nach, daß B, F und H konvex sind. Da B in A abgeschlossen ist und die Funktionen aus B beschränkt sind, ist B kompakt (vgl. Gunning-Rossi [1], I.A.12). Die Kompaktheit der Mengen F und H folgt, sobald die Homöomorphie von B, F und H (in (2) bzw. (3)) bewiesen ist.

(2) Zunächst soll gezeigt werden, daß es eine Bijektion von B auf F gibt.

Aus dem Maximumprinzip für holomorphe Funktionen (vgl. Gunning-Rossi [1], I.A.7.) folgt, daß

$B = \{b \in A : b(0)=0, |b(x)| < 1 \text{ für alle } x \in X\}$ gilt.

Da jede Funktion aus H harmonisch ist und eine positive harmonische Funktion auf X entweder identisch verschwindet oder aber keine Nullstelle hat, gilt

$F = \{f \in A : f(0)=1, \operatorname{Re} f(x) > 0 \text{ für alle } x \in X\}$.

Die Abbildung

$z \rightsquigarrow \frac{1+z}{1-z}$ ist eine Bijektion der offenen Einheitskreisscheibe X_1 auf die obere Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$.

⁽¹⁾ Zwei Mengen, die vermöge einer affin-linearen Abbildung homöomorph sind, werden im folgenden als algebraisch und topologisch isomorph bezeichnet.

Daher wird B auf F durch

$$b \rightsquigarrow \frac{1+b}{1-b} \quad \text{bijektiv abgebildet.}$$

Man prüft leicht nach, daß diese Abbildung stetig ist.

Aus der Kompaktheit von B folgt dann, daß sie ein Homöomorphismus ist.

(3) Die Abbildung

$f \rightsquigarrow \operatorname{Re} f$ ist eine affin-lineare Surjektion von F auf H.

Aus der Normierung aller Funktionen aus F folgt die Injektivität dieser Abbildung. Da sie überdies stetig und F nach (2) kompakt ist, bildet sie F auf H nicht nur algebraisch, sondern auch topologisch isomorph ab./

Das folgende Lemma zeigt, wie sich der Zusammenhang zwischen den Mengen B und F durch die Koeffizienten der Potenzreihenentwicklungen ausdrücken läßt:

(1.7.) LEMMA

Sei $b \in B$ und $f := \frac{1+b}{1-b} \in F$. Dann gilt für die Koeffizienten (b_m) bzw. (f_m) der Potenzreihenentwicklung von b bzw. f:

$$f_0 = 1, \quad b_0 = 0,$$

$$f_m = 2b_m + \sum_{0 < j < m} b_j f_{m-j} \quad (0 \neq m \in \mathbb{N}_0^n).$$

Beweis:

Aus der Gleichung

$$(1 + \sum_{m>0} f_m x^m)(1 - \sum_{m>0} b_m x^m) = 1 + \sum_{m>0} b_m x^m$$

folgt durch Koeffizientenvergleich sofort die Behauptung./

Hieraus ersieht man, daß Koeffizientenprobleme für B und F äquivalent sind.

(1.8.) LEMMA

Für die Koeffizienten (b_m) einer Funktion $b \in B$ gilt

die Abschätzung

$$\sum_{0 \leq m} |b_m|^2 \leq 1.$$

Beweis:

Aus der gleichmäßigen Konvergenz der Partialsummen

$s_m: x \rightsquigarrow \sum_{0 \leq j \leq m} b_j x^j$ gegen b auf jeder kompakten Teilmenge

von X sowie aus der Orthogonalität des Haarschen Maßes σ

auf Y zu allen von 1 verschiedenen Monomen folgt für jede

reelle Zahl r mit $0 < r < 1$:

$$1 \geq \int_Y |b(ry)|^2 \sigma(dy) = \sum_{m \geq 0} |b_m|^2 r^{2|m|} \quad (1).$$

Man sieht leicht ein, daß hieraus für $r \rightarrow 1$ die Behauptung folgt. /

Eine Charakterisierung der Extrempunkte von B findet sich für X_1 bei Hoffman [1] und für mehrere Variable bei Gamelin und Voichick [1, th.3]. Eine Teilmenge der Extrempunkte läßt sich unter Benutzung des vorangehenden Hilfssatzes leicht angeben (vgl. auch Pfister [1], Satz 9):

(1.9.) SATZ

Jede holomorphe Funktion auf X , die im Nullpunkt verschwindet, sich stetig auf

$$\bar{X} := \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_k| \leq 1 \text{ für } k=1, \dots, n\}$$

fortsetzen läßt und auf Y den absoluten Betrag 1 hat, ist ein Extrempunkt der Menge B . (2).

Beweis:

Sei $\check{b} \in C(\bar{X}, \mathbb{C})$ und $b := \text{Rest}_X \check{b} \in A(X)$ mit $b(o) = 0$. Da Y der

(1) Für $m := (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}_0^n$ sei $|m| := m_1 + \dots + m_n$.

(2) B_e sei die Menge der Extrempunkte von B .

Šilov-Rand für die Funktionenalgebra aller auf $\overline{X}$ stetigen, in X holomorphen Funktionen ist (vgl. Bauer [3]), folgt aus $|b(y)| = 1$ für alle $y \in Y$, daß b in B liegt.

Für $x \in X$ sei

$$b(x) = \sum_{m \geq 0} b_m x^m.$$

Für $p \in \mathbb{N}$ definiere man auf Y die Funktionen

$$b_p: y \mapsto b((1 - \frac{1}{p})y).$$

Im Beweis von (1.8.) wurde gezeigt, daß

$$\int |b_p(y)|^2 d\sigma(y) = \sum_{m \geq 0} |b_m|^2 (1 - \frac{1}{p})^{2|m|} \quad \text{ist.}$$

Nach dem Lebesgueschen Konvergenzsatz gilt dann

$$\sum_{m \geq 0} |b_m|^2 = \lim_{p \rightarrow \infty} \int |b_p|^2 d\sigma = \int |b(y)|^2 d\sigma(y) = 1.$$

Seien nun

$$b': x \mapsto \sum_{m \geq 0} b'_m x^m \quad \text{und}$$

$$b'': x \mapsto \sum_{m \geq 0} b''_m x^m \quad \text{zwei Funktionen aus } B, \text{ so daß}$$

$$b = \frac{1}{2} (b' + b'') \quad \text{gilt. Nach (1.8.) ist}$$

$$\sum_{m \geq 0} |b'_m|^2 \leq 1 \quad \text{und} \quad \sum_{m \geq 0} |b''_m|^2 \leq 1. \quad \text{Folglich gilt}$$

$$1 = \sum_{m \geq 0} |b_m|^2 = \sum_{m \geq 0} \frac{1}{4} |b'_m + b''_m|^2 = \sum_{m \geq 0} \frac{1}{4} (2|b'_m|^2 + 2|b''_m|^2 - |b'_m - b''_m|^2) \\ \leq 1 - \frac{1}{4} \sum_{m \geq 0} |b'_m - b''_m|^2. \quad \text{Aus}$$

$$\sum_{m \geq 0} |b'_m - b''_m|^2 \leq 0 \quad \text{folgt dann } b' = b'' \quad \text{und somit } b \in B_e.$$

(1.10.) DEFINITION

Schrankenfunktion auf X heiße jede rationale Funktion

$s: X \rightarrow \mathbb{C}$, zu der ein Polynom

$$q: x \mapsto \sum_{0 \leq j < m} q_j x^j \quad (m \in \mathbb{N}_0) \quad \text{existiert, derart daß}$$

$$q^*: x \mapsto \sum_{0 \leq j < m} \overline{q_{m-j}} x^j \quad \text{in } X \text{ nicht verschwindet und}$$

$$s = \frac{q}{q^*} \quad \text{ist.}$$

Jede Schrankenfunktion s gehört zu B (vgl. Pfister [1], Satz 1).

Läßt sich s überdies stetig auf $\bar{X}$ fortsetzen, so ist $|s(y)| = 1$ für alle $y \in Y$, also $s \in B_e$ nach (1.9.). Die Menge aller Schrankenfunktionen, die sich stetig auf $\bar{X}$ fortsetzen lassen, liegt nach einem Resultat von Pfister [1, Satz 4] dicht in B . Daraus ergibt sich folgende

(1.11.) BEMERKUNG ⁽¹⁾

Die Menge B_e der Extrempunkte ist eine dichte Teilmenge von B .

Nach dem Satz von Krein-Milman (Bourbaki [1], chap. II, §7, n°1) ist jede konvexe, kompakte Menge eines lokal-konvexen Hausdorff-Raumes mit der abgeschlossenen konvexen Hülle ihrer Extrempunkte identisch. In (4.2.) wird gezeigt, daß dieser Satz für das Koeffizientenproblem ein Kriterium liefert, anhand dessen man bei Kenntnis der Koeffizienten der extremalen Funktionen entscheiden kann, wann eine formale Potenzreihe eine Funktion in B bzw. F definiert. Eine einfache Beschreibung aller auf $\bar{X}$ stetig fortsetzbaren - und somit in B extremalen - Schrankenfunktionen ist offenbar nicht möglich. Daher beschränkt sich der Versuch, die Extrempunkte zu charakterisieren, auf F oder auf algebraisch und topologisch mit F isomorphe Mengen.

⁽¹⁾ Der Satz 4 von Pfister [1] findet sich als Theorem 5.5.1. in einem nach Fertigstellung dieser Arbeit erschienenen Buch: W. Rudin,

Function theory in polydiscs. New-York - Amsterdam (1969). Theorem 2.4.1. von Rudin kann herangezogen werden, um die im folgenden Abschnitt angegebene Integraldarstellung (2.2.) zu beweisen.

§ 2 Koeffizienten- und Momentenproblem

Zunächst soll eine Integraldarstellung für Funktionen aus F angegeben werden, die von Korányi und Pukánszky [1] bewiesen wurde. Dazu wird eine Menge M von Maßen auf Y betrachtet, die gewisse Monome (1.2.) annullieren:

(2.1.) DEFINITION

Sei $\underline{IK} := \{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n : \text{es gibt } i, j \in \{1, \dots, n\} \text{ mit } k_i > 0, k_j < 0\}$
(für $n=1$ ist $\underline{IK} = \emptyset$).

$\mathcal{M}_+(Y)$ (bzw. $\mathcal{M}_+^1(Y)$) bezeichne die Menge aller (bzw. aller normierten) positiven Radonmaße auf Y , und es sei

$\underline{M} := \{\mu \in \mathcal{M}_+^1(Y) : \mu(p_k) = 0 \text{ für alle } k \in \underline{IK}\}$.

$\mathcal{M}_+(Y)$ werde mit der vagen Topologie versehen.

(2.2.) SATZ

Q bezeichne die Abbildung

$$Q: (x, y) \rightsquigarrow -1 + 2 \prod_{i=1}^n \frac{y_i}{y_i - x_i} = 1 + 2 \sum_{0 < m \in \mathbb{N}_0^n} \frac{x^m}{y^m} y^{-m}$$

von $X \times Y$ in $\mathbb{C}$.

M und F sind algebraisch und topologisch isomorph vermöge der Abbildung

$$\mu \rightsquigarrow \int Q(., y) \mu(dy) \text{ von } M \text{ auf } F.$$

Beweis:

(1) Korányi und Pukánszky zeigen ([1], th.1), daß eine komplexwertige Funktion f auf X genau dann holomorph ist und einen positiven Realteil besitzt, wenn ein Maß $\mu \in \mathcal{M}_+(Y)$ existiert, das alle Monome p_k mit $k \in \underline{IK}$ annulliert, so daß $f(x) = i \operatorname{Im} f(o) + \int Q(x, y) \mu(dy)$ für alle $x \in X$ gilt.

Wegen $Q(o, .) = 1$ gilt $f \in F$ genau dann, wenn ein $\mu \in M$ existiert, so daß für alle $x \in X$ die Integraldarstellung

$$f(x) = \int Q(x, y) \mu(dy) \text{ gilt.}$$

(2) Die Abbildung

$\mu \rightsquigarrow \int Q(.,y)\mu(dy)$ von M in F ist nach (1) surjektiv.

Es soll gezeigt werden, daß sie überdies injektiv ist.

Für jedes Maß $\mu \in M$, dessen Bild in F die Funktion

$$f: x \rightsquigarrow \sum_{m \geq 0} f_m x^m = \int Q(x,y)\mu(dy) = 1 + 2 \sum_{m > 0} x^m \int y^{-m} \mu(dy)$$

ist, gilt mit den Bezeichnungen von (1.2.):

$$f_0 = 1, f_m = 2 \int p_{-m} d\mu \quad \text{für alle } 0 < m \in \mathbb{N}_0^n.$$

Haben nun $\mu, \nu \in M$ dasselbe Bild in F , so gilt für alle

$$m \in \mathbb{N}_0^n: \mu(p_{-m}) = \nu(p_{-m}). \quad \text{Wegen } \overline{\mu(p_m)} = \mu(p_{-m}) \text{ und}$$

$$\mu(p_k) = \nu(p_k) = 0 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{K} \text{ folgt dann, daß } \mu$$

und ν auf dem Vektorraum übereinstimmen, der von allen

Monomen p_m ($m \in \mathbb{Z}^n$) erzeugt wird. Nach dem Satz von Stone-

Weierstraß liegt dieser Vektorraum bezüglich der Topologie

der gleichmäßigen Konvergenz dicht in der Menge aller

stetigen, komplexwertigen Funktionen auf Y ; μ und ν sind

daher identisch. Die Abbildung

$\mu \rightsquigarrow \int Q(.,y)\mu(dy)$ ist somit ein algebraischer Isomorphismus von M auf F .

(3) M ist bezüglich der vagen Topologie in $\mathcal{M}_+^1(Y)$ abgeschlossen, also kompakt.

Ist $\mu \in M$ und $f := \int Q(.,y)\mu(dy)$ das Bild von μ in F , so gilt für die Koeffizienten von f :

$$f_m = 2\mu(p_{-m}) = 2\overline{\mu(p_m)} \quad (0 < m \in \mathbb{N}_0^n).$$

Die Reihe

$$1 + 2 \sum_{m > 0} x^m \overline{\mu(p_m)} = \int Q(x,y)\mu(dy)$$

konvergiert gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von X

und gleichmäßig für alle $\mu \in M$. Daher ist die Abbildung

$\mu \rightsquigarrow \int Q(.,y)\mu(dy)$ stetig.

Da M kompakt ist, definiert diese Abbildung einen Homöo-

morphismus von M auf F , so daß die beiden Mengen nicht nur algebraisch, sondern auch topologisch isomorph sind./

Das folgende Lemma wurde im Beweis des voranstehenden Satzes bereits hergeleitet:

(2.3.) LEMMA

Ist $\mu \in M$ und

$$f: x \rightsquigarrow \sum_{m \geq 0} f_m x^m = \int Q(x, y) \mu(dy)$$

das kanonische Bild von μ in F , so gilt

$$f_0 = 1 \text{ und } f_m = 2 \int p_{-m} d\mu = 2 \overline{\mu(p_m)} \text{ für } 0 < m \in \mathbb{N}_0^n.$$

Insbesondere gilt für die Koeffizienten einer Funktion

$f \in F$ die Abschätzung

$$|f_m| \leq 2 \text{ für alle } m \in \mathbb{N}_0^n.$$

(2.4.) BEMERKUNG

Im Falle $n > 1$ mehrerer Variablen handelt es sich bei der Integraldarstellung (2.2.) für die Funktionen aus F nicht um eine Darstellung im Sinne des Satzes von Choquet (vgl. etwa Phelps [1], sec.3):

Für kein $y \in Y$ liegt die holomorphe Funktion

$$x \rightsquigarrow Q(x, y) \text{ in } F, \text{ da}$$

$\operatorname{Re} Q(x, y) < 0$ ist für alle $x = -ry$ mit $\frac{1}{2} \leq r < 1$.

Läßt man in der Integraldarstellung (2.2.) hingegen alle Maße $\mu \in \mathcal{H}_+^1(Y)$ zu, so erhält man eine Choquetsche Darstellung für die konvexe, kompakte Menge

$$\{a = \int Q(\cdot, y) \mu(dy) : \mu \in \mathcal{H}_+^1(Y)\}$$

in $A(X)$, deren Extrempunkte gerade die Funktionen

$$Q_y: x \rightsquigarrow Q(x, y) \quad (y \in Y) \text{ sind.}$$

Im Falle $n=1$ einer Variablen stimmt diese Menge mit F überein, ein Resultat, das sich bereits bei Herglotz [1] findet:

(2.5.) SATZ (Herglotz)

Sei $n=1$. Eine Funktion

$f: X_1 \rightarrow \mathbb{C}$ liegt genau dann in F , wenn ein Maß $\mu \in \mathcal{M}_+^1(Y)$ existiert, so daß für alle $x \in X_1$

$$f(x) = \int \frac{y+x}{y-x} \mu(dy) \quad \text{gilt.}$$

Die Extremalpunkte von F sind genau die Funktionen

$$Q_y: x \rightsquigarrow Q(x,y) = 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} x^m y^{-m} = \frac{y+x}{y-x} \quad (y \in Y_1).$$

Beweis:

Für $n=1$ ist $IK = \emptyset$, also $M = \mathcal{M}_+^1(Y)$. Daher folgt der erste Teil der Behauptung sofort aus (2.2.).

Nach (1.6.) liegt jede der Funktionen

$$Q_y: x \rightsquigarrow Q(x,y) = -1 + 2 \frac{y}{y-x} = \frac{y+x}{y-x} = \frac{1+x/y}{1-x/y} \quad \text{in } F.$$

Der Realteil von Q ist der Poissonsche Kern für X_1 .

Die Menge der Extremalpunkte aller normierten, positiven harmonischen Funktionen auf X_1 ist

$$H_e = \{ \operatorname{Re} Q_y : y \in Y_1 \} \quad (\text{vgl. etwa Bauer [2], S.99-100}).$$

Da H und F algebraisch isomorph sind (1.6.), gilt dann

$$F_e = \{ Q_y : y \in Y_1 \} \quad \text{.}$$

Bevor nun der Zusammenhang zwischen dem Koeffizientenproblem für F und einem Momentenproblem für M hergestellt wird, soll eine Menge positiv definiter Funktionen auf $\mathbb{Z}^n$ eingeführt werden.

Eine Funktion

$p: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{C}$ heißt positiv definit, wenn für jede natürliche Zahl l , jede Wahl von Punkten $m_1, \dots, m_l \in \mathbb{Z}^n$ und jedes Tupel $c_1, \dots, c_l$ komplexer Zahlen

$$\sum_{i,j=1}^l p(m_i - m_j) c_i \overline{c_j} \geq 0 \quad \text{ist.}$$

(2.6.) DEFINITION

Die Menge aller normierten positiv definiten Funktionen auf $\mathbb{Z}^n$, die auf $\mathbb{K}$ (2.1.) verschwinden, werde mit

$P := \{p: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{C}, p(0)=1, p \text{ positiv definit}, p(k)=0 \text{ für alle } k \in \mathbb{K}\}$ bezeichnet. P sei mit der Topologie der punktweisen Konvergenz auf $\mathbb{Z}^n$ versehen.

(2.7.) SATZ

Für $\mu \in M$ bezeichne $\hat{\mu}$ die Abbildung

$$\hat{\mu}: m \rightsquigarrow \mu(p_m) \quad (1.2.) \text{ von } \mathbb{Z}^n \text{ in } \mathbb{C}. \text{ Dann gilt:}$$

Die Abbildung $\mu \rightsquigarrow \hat{\mu}$ ist ein algebraischer und topologischer Isomorphismus von M auf P .

Beweis:

Nach dem Satz von Bochner existiert zu jeder Funktion $p \in P$ ein Maß $\mu \in \mathcal{M}_+(Y)$ mit der Eigenschaft:

$$p(m) = \int y^m \mu(dy) = \mu(p_m) \quad \text{für alle } m \in \mathbb{Z}^n.$$

Nach Definition von P liegt μ sogar in M . Die Abbildung $\mu \rightsquigarrow \hat{\mu}$ ist folglich eine Surjektion von M auf P . Sie ist injektiv, da ein Maß aus $\mathcal{M}_+^1(Y)$ bereits durch seine Werte auf den Monomen p_m ($m \in \mathbb{Z}^n$) eindeutig bestimmt ist. Die Abbildung $\mu \rightsquigarrow \hat{\mu}$ ist daher eine affine Bijektion von M auf P . Da sie überdies stetig und da M kompakt ist, definiert $\mu \rightsquigarrow \hat{\mu}$ nicht nur einen algebraischen, sondern auch einen topologischen Isomorphismus von M auf P . /

Dieser Satz zeigt zusammen mit (2.2.), daß es sich bei der Bestimmung der Extrempunkte von F , M und P um äquivalente Probleme handelt.

Der Zusammenhang zwischen einem Koeffizienten- und einem Momentenproblem läßt sich nun formulieren:

(2.8.) SATZ

Sei $(f_m) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}_0^n}$. Für $m \in \mathbb{Z}^n$ setze man

$$a_m := \begin{cases} f_0, & m=0 \\ \frac{1}{2} \overline{f_m}, & m > 0 \\ \frac{1}{2} f_{-m}, & m < 0 \\ 0, & m \in \mathbb{K}. \end{cases}$$

Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(1) Es gibt eine Lösung $f \in F$ des Koeffizientenproblems

$$f: x \mapsto \sum_{m \geq 0} f_m x^m \quad (x \in X).$$

(2) Es gibt eine Lösung $\mu \in \mathcal{M}_+^1(Y)$ des Momentenproblems

$$a_m = \int p_m d\mu \quad (m \in \mathbb{Z}^n).$$

(3) Es gibt eine Lösung $\mu \in \mathcal{M}$ des Momentenproblems

$$a_m = \int p_m d\mu \quad (m \in \mathbb{N}_0^n).$$

(4) Es gibt eine Funktion $p \in P$ mit der Eigenschaft

$$a_m = p(m) \text{ für alle } m \in \mathbb{N}_0^n \text{ (} \mathbb{Z}^n \text{)}.$$

BEMERKUNGEN:

(i) Es gibt höchstens eine Lösung von (1)-(4).

(ii) Die Äquivalenz der Aussagen (1) und (4) wird auch bei Korányi und Pukánszky [1] bewiesen.

(iii) Für den Fall $n=1$ findet sich ein Zusammenhang zwischen dem Koeffizientenproblem und einem Momentenproblem bereits bei F. Riesz [1, p.60].

Beweis des Satzes:

(1) $\Rightarrow$ (3):

Nach (2.2.) und (2.3.) existiert ein $\mu \in \mathcal{M}$ mit der Eigenschaft:

$$f_m = 2 \overline{\mu(p_m)} \quad (m > 0), \text{ also}$$

$$a_m = \mu(p_m) \text{ für alle } m > 0 \quad \text{und} \quad a_0 = f_0 = 1 = \mu(p_0).$$

(3) $\Rightarrow$ (1):

Für $m \in \mathbb{N}_0^n$ ist $\mu(p_{-m}) = \overline{a_m}$. Daher gilt für $x \in X$:

$$\begin{aligned} \int Q(x, y) \mu(dy) &= \int (1 + 2 \sum_{m \geq 0} x^m y^{-m}) \mu(dy) = \\ &= \int p_0 d\mu + 2 \sum_{m \geq 0} x^m \int p_{-m} d\mu = a_0 + 2 \sum_{m \geq 0} x^m \overline{a_m} = \\ &= \sum_{m \geq 0} f_m x^m = f(x) . \end{aligned}$$

Nach (2.2.) ist daher $f \in F$.

(2) $\Leftrightarrow$ (3) gilt wegen $a_m = \overline{a_{-m}}$ und $a_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{K}$.

(3) $\Leftrightarrow$ (4) gilt wegen (2.7.) und der Eigenschaften für $p \in P$:

$$p(m) = \overline{p(-m)} \quad (m \in \mathbb{Z}^n) , \quad p(k) = 0 \quad (k \in \mathbb{K}) . /$$

§ 3 Eine algebraische Lösung des Koeffizientenproblems

In diesem Abschnitt soll eine Lösung des Koeffizientenproblems angegeben werden, die insbesondere einen neuen Beweis für den Hauptsatz der Arbeit von Pfister [1] liefert.

(3.1.) BEZEICHNUNGEN

Für jedes $m := (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}_0^n$ sei $[o, m] := \{j \in \mathbb{N}_0^n : 0 \leq j \leq m\}$.

$\pi(m) := \prod_{k=1}^n (1+m_k)$ bezeichne die Anzahl der Elemente von $[o, m]$.

Es soll gezeigt werden, daß

$$\varphi : (j_1, \dots, j_n) \rightsquigarrow 1 + \sum_{r=1}^n (j_r \prod_{s=r+1}^n (1+m_s))$$

eine Bijektion von $[o, m]$ auf das Intervall $[1, \pi(m)]$ natürlicher Zahlen ist, wobei für $t \in \mathbb{N}$ das Produkt $\prod_{s=t+1}^n \dots := 1$ gesetzt wird.

Zunächst bestätigt man durch vollständige Induktion, daß für jedes $t \in \mathbb{N}$ und beliebige reelle Zahlen $q_1, \dots, q_t$

$$(*) \quad 1 + \sum_{r=1}^t (q_r \prod_{s=r+1}^t (1+q_s)) = \prod_{s=1}^t (1+q_s) \quad \text{gilt.}$$

Da φ isoton ist, gilt wegen $(*)$ für alle $j \in [o, m]$:

$$1 = \varphi(o) \leq \varphi(j) \leq \varphi(m) = \pi(m). \quad \varphi \text{ bildet also } [o, m] \text{ in}$$

$[1, \pi(m)] \subset \mathbb{N}$ ab. Überdies ist φ eine Injektion:

Sind $j, j' \in [o, m]$ verschieden, so gibt es einen kleinsten Index k , so daß $j_k \neq j'_k$ ist. Für $k=n$ ist $\varphi(j) \neq \varphi(j')$.

Sei nun $k < n$ und etwa $j'_k - j_k \geq 1$. Unter Benutzung von $(*)$ folgt:

$$\begin{aligned} \varphi(j') - \varphi(j) &= 1 + j'_k \prod_{s=k+1}^n (1+m_s) + \sum_{r=k+1}^n (j'_r \prod_{s=r+1}^n (1+m_s)) \\ &\quad - 1 - j_k \prod_{s=k+1}^n (1+m_s) - \sum_{r=k+1}^n (j_r \prod_{s=r+1}^n (1+m_s)) \\ &\geq 1 + (j'_k - j_k) \prod_{s=k+1}^n (1+m_s) - 1 - \sum_{r=k+1}^n (m_r \prod_{s=r+1}^n (1+m_s)) \geq \end{aligned}$$

$$\geq 1 + \prod_{s=k+1}^n (1+m_s) - \prod_{s=k+1}^n (1+m_s) = 1, \text{ also } \varphi(j) \neq \varphi(j').$$

Da $[0, m]$ aus $\pi(m)$ Elementen besteht, ist φ auch surjektiv und damit eine Bijektion.

Die inverse Abbildung $\varphi^{-1}: [1, \pi(m)] \rightarrow [0, m]$ werde mit $\tilde{m}$ bezeichnet.

Ist nun $(a_j) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0^n}$ oder $a: x \rightsquigarrow \sum_{j \geq 0} a_j x^j$ eine formale Potenzreihe, so sei

$[a_m]$ die $\pi(m) \times \pi(m)$ -Matrix mit den Elementen

$$a_{rs} := \begin{cases} a_{\tilde{m}(s) - \tilde{m}(r)} & , \tilde{m}(r) \leq \tilde{m}(s) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (r, s \in [1, \pi(m)]).$$

Mit diesen Bezeichnungen gilt dann das folgende

(3.2.) LEMMA

Sei $(f_m) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0^n}$ und f_0 reell. Die durch

$$p: m \rightsquigarrow \begin{cases} f_0, & m=0 \\ \frac{1}{2} \overline{f_m}, & m>0 \\ \frac{1}{2} f_{-m}, & m<0 \\ 0, & m \in \mathbb{IK} \end{cases}$$

auf $\mathbb{Z}^n$ definierte Funktion p ist genau dann positiv definit, wenn für alle $m \in \mathbb{N}_0^n$ die Hermitschen Matrizen $[f_m] + [\overline{f_m}]'$ positiv semidefinit sind ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ Zu einer Matrix A sei $\bar{A}'$ die Adjungierte, d.h. die Transponierte der konjugiert komplexen Matrix. Ist A Hermitsch (d.h. $A = \bar{A}'$), und sind alle Eigenwerte von A größer oder gleich Null, so heißt A positiv semidefinit. Dies ist äquivalent damit, daß die von A induzierte Hermitsche Form positiv semidefinit ist.

Beweis:

Für jede Funktion $p: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{C}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(1) p ist positiv definit.

(2) $\sum_{i,j \in J} p(i-j) c_i \bar{c}_j > 0$ für alle endlichen Teilmengen $J \subset \mathbb{Z}^n$
und alle $c_i \in \mathbb{C}$.

(3) $\sum_{-m \leq i, j \leq m} p(i-j) c_i \bar{c}_j > 0$ für alle $m \in \mathbb{N}_0^n$ und alle $c_i \in \mathbb{C}$.

(4) $\sum_{0 \leq i, j \leq 2m} p(i-j) c_i \bar{c}_j > 0$ für alle $m \in \mathbb{N}_0^n$ und alle $c_i \in \mathbb{C}$.

(5) $\sum_{0 \leq i, j \leq m} p(i-j) c_i \bar{c}_j > 0$ für alle $m \in \mathbb{N}_0^n$ und alle $c_i \in \mathbb{C}$.

(6) $\sum_{r,s \in [1, \nu(m)]} p(\tilde{m}(r) - \tilde{m}(s)) c_r \bar{c}_s > 0$ für alle $m \in \mathbb{N}_0^n$
und alle $c_1, \dots, c_{\nu(m)} \in \mathbb{C}$.

(6) bedeutet aber für die oben definierte Funktion p , daß für jedes $m \in \mathbb{N}_0^n$ die Matrizen

$$A_m := (p(\tilde{m}(r) - \tilde{m}(s)))_{r,s \in [1, \nu(m)]}$$

positiv semidefinit sind.

Da f_0 reell ist, gilt nach Definition von p

$$2 A_m = [f_m] + [f_m]', \quad \text{. /}$$

Hieraus folgt nun eine Lösung des Koeffizientenproblems für F , die sich für $n=1$ z.B. bei Schur [1, §8, Satz XI] findet:

(3.3.) SATZ

Sei $(f_m) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0^n}$. Genau dann gibt es eine Lösung $f \in F$ des Koeffizientenproblems

$$f: x \mapsto \sum_{m \geq 0} f_m x^m \quad (x \in X),$$

wenn $f_0 = 1$ ist und für alle $m \in \mathbb{N}_0^n$ die Matrizen $[f_m] + [f_m]'$ positiv semidefinit sind.

Beweis:

Nach (2.8.) gibt es genau dann eine Lösung $f \in F$ des Koeffizientenproblems, wenn die durch das Lemma (3.2.) definierte

Funktion p in P liegt. Nach (3.2.) ist aber dies genau dann der Fall, wenn $f_0=1$ ist und für jedes $m \in \mathbb{N}_0^n$ die Matrizen $[f_m] + \overline{[f_m]}$ positiv semidefinit sind./

(3.4.) BEMERKUNG

Die Bedingungen, daß für alle $m \in \mathbb{N}_0^n$ die Matrizen $[f_m] + \overline{[f_m]}$ positiv semidefinit seien, lassen sich durch ein System algebraischer Ungleichungen in den Koeffizienten $f_j, \overline{f_j}$ ersetzen (vgl. Pfister [1, S.262]).

Bevor als Korollar zu (3.3.) die Pfistersche Lösung des Koeffizientenproblems für die beschränkten Funktionen angegeben werden kann, werden noch zwei Hilfssätze benötigt.

(3.5.) LEMMA

Sind $(a_m), (b_m), (c_m) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0^n}$ und a, b, c die mit diesen Koeffizienten gebildeten formalen Potenzreihen, so gilt

$a b = c$ genau dann, wenn für alle $m \in \mathbb{N}_0^n$

$$[a_m] [b_m] = [c_m] \quad \text{ist.}$$

Insbesondere gilt $ab=1$ genau dann, wenn

$$[a_m] = [b_m]^{-1} \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N}_0^n \text{ ist.}$$

Man bestätigt das Ergebnis durch elementares Ausrechnen der Matrizen (für den Fall $n=1$ vgl. auch Schur [1, §5]).

(3.6.) LEMMA

Sind a, b, c und d quadratische Matrizen gleicher Ordnung, so daß

(1) b^{-1} und d^{-1} existieren,

(2) $b d = d b$, $b c = c b$ und

(3) $a d = b c$

gilt, so ist

$\bar{b}'b - \bar{a}'a$ genau dann positiv semidefinit, wenn
dies für
 $\bar{d}'d - \bar{c}'c$ gilt.

Beweis:

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (1) $\bar{b}'b - \bar{a}'a$ ist positiv semidefinit.
- (2) $\bar{d}'(\bar{b}'b - \bar{a}'a)d$ ist positiv semidefinit.
- (3) $\bar{b}'\bar{d}'d b - \bar{d}'\bar{a}'a d$ ist positiv semidefinit.
- (4) $\bar{b}'\bar{d}'d b - \bar{c}'\bar{b}'b c$ ist positiv semidefinit.
- (5) $\bar{b}'(\bar{d}'d - \bar{c}'c) b$ ist positiv semidefinit.
- (6) $\bar{d}'d - \bar{c}'c$ ist positiv semidefinit. /

(3.7.) BEMERKUNG

Dieses Lemma besagt insbesondere, daß für den Quotienten
 $q = \frac{a}{b}$ zweier in X konvergenter Potenzreihen a und b , von
denen b in X nicht verschwindet, die positive Semidefinit-
heit der Matrizen

$$\begin{bmatrix} \bar{b}_m \\ \bar{b}_m \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \bar{b}_m \\ \bar{b}_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{a}_m \\ \bar{a}_m \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \bar{a}_m \\ \bar{a}_m \end{bmatrix} \quad (m \in \mathbb{N}_0^n)$$

unabhängig von der für q gewählten Darstellung ist.

Sind nämlich c und d zwei weitere in X konvergente
Potenzreihen, so daß d in X nicht verschwindet und

$q = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ist, so gilt nach (3.5.) für jedes $m \in \mathbb{N}_0^n$:

- (1) $\begin{bmatrix} \bar{b}_m \\ \bar{b}_m \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} \bar{d}_m \\ \bar{d}_m \end{bmatrix}$ sind invertierbar,
- (2) $\begin{bmatrix} \bar{b}_m \\ \bar{b}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{d}_m \\ \bar{d}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\bar{b} \ d)_m \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\bar{d} \ b)_m \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{d}_m \\ \bar{d}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{b}_m \\ \bar{b}_m \end{bmatrix}$ und
 $\begin{bmatrix} \bar{b}_m \\ \bar{b}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{c}_m \\ \bar{c}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{c}_m \\ \bar{c}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{b}_m \\ \bar{b}_m \end{bmatrix},$
- (3) $\begin{bmatrix} \bar{a}_m \\ \bar{a}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{d}_m \\ \bar{d}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b}_m \\ \bar{b}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{c}_m \\ \bar{c}_m \end{bmatrix}.$

Aus (3.6.) folgt dann die Behauptung.

(3.8.) KOROLLAR (Pfister [1], Satz 14)

Für $(b_m) \in \mathbb{A}^{\mathbb{N}_0^n}$ existiert genau dann eine Lösung $b \in B$ des Koeffizientenproblems

$b: x \rightsquigarrow \sum_{m \in \mathbb{N}_0^n} b_m x^m \quad (x \in X)$, wenn $b_0 = 0$ ist und für alle $m \in \mathbb{N}_0^n$ die Matrizen

$[1_m] - \overline{[b_m]}, [b_m]$ positiv semidefinit sind.

(Dabei ist $[1_m]$ die der konstanten Funktion 1 zugeordnete Einheitsmatrix).

Beweis:

1. Sei $b \in B$. Dann ist $b_0 = 0$, und nach (1.6.) existiert eine Funktion

$f: x \rightsquigarrow \sum_{m \in \mathbb{N}_0^n} f_m x^m$ in F mit $\frac{b}{1} = \frac{f-1}{f+1}$.

Nach (3.3.) sind dann für alle $m \in \mathbb{N}_0^n$ die Matrizen

$2([f_m] + \overline{[f_m]}) = \overline{[(f+1)_m]}, [(f+1)_m] - \overline{[(f-1)_m]}, [(f-1)_m]$ positiv semidefinit.

Dies gilt nach (3.7.) ebenfalls für die Matrizen

$[1_m], [1_m] - \overline{[b_m]}, [b_m] = [1_m] - \overline{[b_m]}, [b_m] \quad (m \in \mathbb{N}_0^n)$.

2. Sei $b_0 = 0$. Für alle $m \in \mathbb{N}_0^n$ seien die Matrizen

$[1_m], [1_m] - \overline{[b_m]}, [b_m]$ positiv semidefinit.

Setzt man $f_0 = 1$ und definiert rekursiv

$f_m := 2 b_m + \sum_{0 < j < m} b_j f_{m-j} \quad (m > 0)$, so gilt für die mit diesen Koeffizienten gebildete formale Potenzreihe f , daß

$b(f+1) = f-1$, also nach (3.5.)

$[b_m] [(f+1)_m] = [1_m] [(f-1)_m]$ für alle $m \in \mathbb{N}_0^n$ gilt.

Die Matrizen $[b_m]$, $[1_m]$, $[(f-1)_m]$ und $[(f+1)_m]$ erfüllen die Voraussetzungen von (3.6.), so daß für $m \in \mathbb{N}_0^n$ auch die Matrizen

$\overline{[(f+1)_m]}, [(f+1)_m] - \overline{[(f-1)_m]}, [(f-1)_m] = 2([f_m] + \overline{[f_m]})$

positiv semidefinit sind. Nach (3.3.) gilt daher $f \in F$, und aus $b(f+1) = f-1$ folgt nach (1.6.)

$$b = \frac{f-1}{f+1} \in B.$$

(3.9.) BEMERKUNG

Bei Pfister [1] führt der Ansatz, eine Funktion aus B durch geeignete Vielfache von Schrankenfunktionen zu approximieren, auf eine lineare Eigenwertaufgabe. Das Approximationsproblem ist genau dann lösbar, wenn alle Eigenwerte abzählbar vieler Koeffizientenmatrizen kleiner oder gleich 1 sind. Pfister zeigt dann, daß diese Bedingungen mit der Forderung gleichbedeutend sind, die in (3.8.) angegebenen Matrizen seien positiv semidefinit.

Hingegen wird der hier angegebene Beweis im wesentlichen mit funktionalanalytischen Methoden geführt. Entscheidend ist der Satz (2.8.), der den Zusammenhang zwischen einem Koeffizientenproblem und einem Momentenproblem herstellt und die Isomorphie der Menge F holomorpher Funktionen mit der Menge M von Maßen ausnutzt.

§ 4 Extremalpunktmethoden

Während im letzten Abschnitt eine algebraische Lösung des Koeffizientenproblems angegeben wurde, soll nun gezeigt werden, wie man aus dem Satz von Krein-Milman approximative Aussagen über Lösungen erhält.

Im Falle einer Variablen lassen sich die Koeffizienten der extremalen Funktionen aus F einfach beschreiben, wodurch eine vollständige Lösung des Koeffizientenproblems angegeben werden kann. Der Untersuchung der Extremalpunktmenge bei mehreren Variablen sind dann die beiden folgenden Abschnitte gewidmet. Die Sätze dieses Paragraphen lassen sich auch für $n > 1$ anwenden, sobald eine für das Koeffizientenproblem geeignete Charakterisierung der Extremalpunkte gefunden ist.

Für eine konvexe Menge G bezeichne G_e wieder die Menge aller Extremalpunkte von G , und $k(G_e)$ sei die konvexe Hülle dieser Punktmenge.

(4.1.) DEFINITION

Für jede Menge $G \subset A$ holomorpher Funktionen auf X und jede Teilmenge $J \subset \mathbb{N}_0^n$ bezeichne G_J die Menge aller $(g_j)_{j \in J} \in \mathbb{C}^J$, zu denen eine Funktion $g \in G$ existiert, so daß für alle $j \in J$ g_j der j -te Koeffizient der Potenzreihenentwicklung von g ist. Ferner sei

$$G_\infty := G_{\mathbb{N}_0^n} \quad \text{und}$$

$$G_m := G_{[0,m]} \quad (m \in \mathbb{N}_0^n, \quad [0,m] := \{j \in \mathbb{N}_0^n : 0 \leq j \leq m\}).$$

(4.2.) SATZ

G sei eine der Mengen B oder F , $D := k(G_e)$ sei die konvexe Hülle der Extrempunkte von G und $(g_m) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0^n}$.

Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(1) Die mit den Koeffizienten (g_m) gebildete Reihe

$$g: x \rightsquigarrow \sum_{m \geq 0} g_m x^m \text{ ist in } X \text{ absolut summierbar}$$

und definiert eine Funktion $g \in G$.

(2) Zu jedem $m \in \mathbb{N}_0^n$ existiert ein $(d_j) \in D_m$, so daß für $0 \leq j \leq m$ $g_j = d_j$ gilt.

(3) Zu jedem $\varepsilon > 0$ und jeder endlichen Teilmenge $J \subset \mathbb{N}_0^n$ existiert ein $(d_j) \in D_J$, so daß für alle $j \in J$ $|g_j - d_j| < \varepsilon$ ist.

Beweis:

(1) $\Rightarrow$ (2):

Sei $m \in \mathbb{N}_0^n$ und

$$\Upsilon_m: A \rightarrow \mathbb{C}^{[0, m]}$$

$a \rightsquigarrow (a_j)_{0 \leq j \leq m}$, wobei (a_j) die Koeffizienten der

Potenzreihenentwicklung von $a \in A$ sind.

Υ_m ist (affin-)linear und stetig, da für $a, a' \in A$, $0 < r < 1$ und $j \in \mathbb{N}_0^n$

$$|a_j - a'_j| r^{|j|} = \left| \int_Y (a - a')(ry) y^{-j} \sigma(dy) \right| \leq \sup_{y \in Y} |(a - a')(ry)|$$

gilt (vgl. (1.2.)).

Daher ist $\Upsilon_m(G) = G_m$ eine konvexe, kompakte Teilmenge des endlichdimensionalen (reellen) Vektorraums $\mathbb{C}^{[0, m]}$.

Nach einem Satz von Minkowski (vgl. Phelps [1]) ist jeder Punkt von G_m eine endliche Konvexkombination von Extrempunkten aus G_m .

Nun gibt es zu jedem Extrempunkt $(f_j) \in (G_m)_e$ einen

Extremalpunkt $f \in G_e$, so daß

$\Upsilon_m(f) = (f_j)_{0 \leq j \leq m}$ ist (vgl. Bauer [2], Satz 2.2.3.).

Daher existiert zu dem gegebenen $(g_j) \in G_m$ ein Punkt

$\text{dek}(G_e) = D$ mit der Eigenschaft

$\Upsilon_m(d) = (g_j)_{0 \leq j \leq m}$.

(2) $\Rightarrow$ (3):

Zu jeder endlichen Teilmenge $J \subset \mathbb{N}_0^n$ gibt es ein $m \in \mathbb{N}_0^n$,

so daß $J \subset [0, m]$ ist.

(3) $\Rightarrow$ (1):

Aus (1.8.) bzw. (2.3.) folgt $|d_m| \leq 2$ für alle $(d_m) \in D_\infty$.

Nach (3) ist dann auch $|g_m| \leq 2$ für alle $m \in \mathbb{N}_0^n$.

Zu jeder endlichen Teilmenge $J \subset \mathbb{N}_0^n$ existiert ein $(d_j) \in D_J$,

so daß für alle $j \in J$

$|g_j - d_j| < 1$ ist. Für $x \in X$ gilt dann

$$\left| \sum_{j \in J} |g_j x^j| - \sum_{j \in J} |d_j x^j| \right| \leq \sum_{j \in J} |x^j| \leq \sum_{m \geq 0} |x^m| < +\infty.$$

Daher ist

$$\sum_{j \in J} |g_j x^j| \leq \sum_{m \geq 0} |x^m| + \sum_{j \in J} |d_j x^j| \leq 3 \sum_{m \geq 0} |x^m| < +\infty$$

für alle endlichen Teilmengen $J \subset \mathbb{N}_0^n$ nach oben beschränkt,

die Reihe $\sum_{m \geq 0} g_m x^m$ also absolut summierbar für $x \in X$.

$g: x \rightsquigarrow \sum_{m \geq 0} g_m x^m$ ist folglich holomorph in X .

Um zu zeigen, daß g in G liegt, seien $\varepsilon > 0$ und eine

kompakte Teilmenge $K \subset X$ vorgegeben.

Zu K existieren positive Zahlen $0 < \alpha < \beta < 1$ mit der Eigen-

schaft, daß für alle $x := (x_1, \dots, x_n) \in K$

$|x_k| \leq \alpha < \beta$ für $k=1, \dots, n$ ist.

Sei $q \in \mathbb{N}$ so gewählt, daß $\beta^q < \frac{\varepsilon}{4}$ ist.

Für $l := (q, \dots, q)$ ist $J := [0, l]$ eine endliche Teilmenge

von $\mathbb{N}_0^n$. Zu ε und J existiert nach Voraussetzung ein

$(d_j) \in D_J$ und damit eine Funktion

$d: x \rightsquigarrow \sum_{m \geq 0} d_m x^m \quad (x \in X)$ aus D , so daß

$$|g_j - d_j| < \varepsilon \leq \frac{\varepsilon}{\beta^{|j|}} \quad \text{für alle } j \in J \text{ gilt.}$$

Für $m \in \mathbb{N}_0 \setminus J$ ist $|m| > q$, also wegen $|d_m|, |g_m| \leq 2$

$$|g_m - d_m| \leq |g_m| + |d_m| \leq 4 < \frac{\varepsilon}{\beta^q} \leq \frac{\varepsilon}{\beta^{|m|}}$$

Daher ist für alle $x \in K$ und alle $m \in \mathbb{N}_0^n$

$$|g_m x^m - d_m x^m| \leq \varepsilon \frac{\alpha^{|m|}}{\beta^{|m|}}, \text{ also}$$

$$\left| \sum_{m \geq 0} g_m x^m - \sum_{m \geq 0} d_m x^m \right| \leq \varepsilon \sum_{m \geq 0} \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{|m|} = \varepsilon \left(\frac{\beta}{\beta - \alpha} \right)^n.$$

Daher liegt g in $\bar{D}$.

Nach dem Satz von Krein-Milman ist $\bar{D} = \overline{k(G_e)} = G$, woraus die Behauptung folgt. /

(4.3.) KOROLLAR 1

Sei G eine der Mengen B oder F und $(g_m) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0^n}$.

Genau dann ist die Reihe

$g: x \rightsquigarrow \sum_{m \geq 0} g_m x^m$ in X absolut summierbar und

definiert eine Funktion $g \in G$, wenn für jedes $m \in \mathbb{N}_0^n$

$(g_j)_{0 \leq j \leq m} \in G_m$ ist.

Beweis:

Im Beweis des vorangegangenen Satzes wurde gezeigt, daß

für jedes $m \in \mathbb{N}_0^n$ zu $(g_j) \in G_m$ eine Funktion $d \in D = k(G_e)$

mit der Eigenschaft $\Psi_m(d) = (g_j)_{0 \leq j \leq m}$ existiert.

Daher gibt es ein $(d_j) \in D_m$ mit $d_j = g_j$ für $0 \leq j \leq m$.

Nach (4.2.) liegt dann g in G .

Die Umkehrung ist trivial. /

(4.4.) BEMERKUNG 1

Für den Fall einer Variablen und die Menge F hat Carathéodory [2] dieses Resultat bewiesen.

(4.5.) KOROLLAR 2

Sei G eine der Mengen B oder F . Zu jeder Funktion $g \in G$ und jedem $m \in \mathbb{N}_0^n$ existiert eine endliche Konvexkombination $d \in k(G_e)$ von extremalen Funktionen, so daß die Koeffizienten g_j und d_j der Potenzreihenentwicklungen von g und d für alle $j \leq m$ übereinstimmen.

(4.6.) BEMERKUNG 2

Pfister beweist für beschränkte Funktionen den bereits zitierten Satz 4 aus [1], wonach eine Approximation im Sinne der kompakten Konvergenz bereits durch eine extreme Funktion erreicht wird.

Ein ähnliches Ergebnis wie das im Korollar 2 formulierte hat Carathéodory [1] für die Menge F im Falle einer Veränderlichen erhalten. Es ist insofern schärfer, als eine Konvexkombination von $m+1$ Funktionen ausreicht, um Übereinstimmung der ersten m Koeffizienten zu erhalten; andererseits wird zu den extremalen Funktionen noch die Konstante 1 hinzugenommen und statt $k(F_e)$ die konvexe Hülle dieser größeren Funktionenmenge gebildet.

Für den Fall einer Variablen sei das aus (4.2.) und der Charakterisierung (2.5.) der Extrempunkte von F gewonnene Ergebnis nochmals formuliert:

(4.7.) SATZ (Carathéodory)

Sei $n=1$ und $(f_m) \in \mathbb{N}_0$. Die mit den Koeffizienten (f_m) gebildete Reihe

$f: x \rightsquigarrow \sum_{m \geq 0} f_m x^m$ stellt genau dann eine Funktion

$f \in F$ dar, wenn zu jeder natürlichen Zahl m eine natürliche Zahl k und nicht-negative reelle Zahlen

$\theta_1, \dots, \theta_k \in 2\pi$ sowie $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in 1$ mit $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$
existieren, so daß

$$f_0 = 1 \text{ und}$$

$$f_j = 2 \sum_{p=1}^k \lambda_p e^{ij\theta_p} \quad \text{für alle } 0 < j \leq m \text{ gelten.}$$

Beweis:

Nach (2.5.) ist

$$F_e = \left\{ Q_{e^{-i\theta}} : x \rightsquigarrow 1 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} x^j e^{ij\theta} : \theta \in \mathbb{R}, 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\}.$$

Aus (4.2.) folgt daher die Behauptung. /

§ 5 Charakterisierung der Extrempunkte

In § 2 wurde gezeigt, daß die Bestimmung der Extrempunkte einer Menge F holomorpher Funktionen, einer Menge M von Maßen und einer Menge P positiv definiter Funktionen äquivalente Probleme sind. Die Menge M_e der Extrempunkte von M soll hier charakterisiert werden.

(5.1.) DEFINITION

Für jede reelle Zahl $q > 1$ und jedes Maß $\mu \in \mathcal{M}_+^1(Y)$ bezeichne $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}^q(\mu)$ bzw. $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^q(\mu)$ die Menge aller reellen bzw. komplexen q -fach μ -integrierbaren Funktionen auf Y . $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^q(\mu)$ sei mit der durch die Halbnorm

$N_q(f) := (\int |f|^q d\mu)^{1/q}$ definierten Topologie versehen.

$\underline{V}$ bezeichne den linearen Teilraum von $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^q(\mu)$, der von den Monomen p_k mit $k \in \mathbb{K}$ und den Konstanten erzeugt wird.

Die Extrempunkte der konvexen, kompakten Menge M lassen sich nun folgendermaßen kennzeichnen:

(5.2.) SATZ

Für ein Maß $\mu \in M$ sind folgende Eigenschaften äquivalent;

- (1) $\mu \in M_e$.
- (2) Jede Borel-meßbare Funktion $f: Y \rightarrow \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften $0 \leq f \leq 1$ und

$$\int f p_k d\mu = 0 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{K}$$

ist μ -fast überall konstant.

- (3) Eine μ -fast überall beschränkte Borelmeßbare Funktion $f: Y \rightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann μ -fast überall konstant, wenn

$\int f p_k d\mu = 0$ für alle $k \in \mathbb{K}$ gilt.

(4) V liegt dicht in $\mathcal{L}^1_{\mathbb{E}}(\mu)$ (5.1.).

Beweis:

(1) $\Rightarrow$ (2):

Sei $\mu \in M_{\mathbb{E}}$ und $0 \leq f \leq 1$, $\int f p_k d\mu = 0$ für alle $k \in \mathbb{K}$.

Aus $\mu(f)=0$ bzw. $\mu(f)=1$ folgt μ -fast überall $f=0$ bzw. $f=1$.

Ist $0 < \mu(f) < 1$, so setze man

$\nu := \frac{f\mu}{\mu(f)}$ und $\rho := \frac{(1-f)\mu}{1-\mu(f)}$. Dann sind ν und ρ Wahrscheinlichkeitsmaße auf Y , und aus

$$\nu(p_k) = \frac{1}{\mu(f)} \int f p_k d\mu = 0 \quad \text{bzw.}$$

$$\rho(p_k) = \frac{1}{1-\mu(f)} (\int p_k d\mu - \int f p_k d\mu) = 0 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{K} \text{ folgt,}$$

daß ν und ρ in M liegen.

Da μ extremal ist und $\mu = f\mu + (1-f)\mu = \mu(f)\nu + (1-\mu(f))\rho$.

gilt, ist $\mu = \nu = \rho$. Die Dichtefunktion $\frac{f}{\mu(f)}$ von ν bzgl. μ

ist μ -fast überall eindeutig bestimmt, so daß

$f = \mu(f)$ μ -fast überall gilt.

(2) $\Rightarrow$ (3):

Sei $f: Y \rightarrow \mathbb{E}$ eine meßbare und μ -fast überall beschränkte

Funktion mit der Eigenschaft:

$$\int f p_k d\mu = 0 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{K}.$$

Da $\mathbb{K} = -\mathbb{K}$ ist, gilt dann auch

$$\int \bar{f} p_k d\mu = 0 \quad \text{und somit}$$

$$\int p_k \operatorname{Re} f d\mu = \int p_k \operatorname{Im} f d\mu = 0 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{K}.$$

Mit f sind auch $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ μ -fast überall beschränkt,

so daß für geeignete Konstanten α_1, β_1 μ -fast überall

$0 \leq \alpha_1(\beta_1 + \operatorname{Re} f) \leq 1$ und $0 \leq \alpha_2(\beta_2 + \operatorname{Im} f) \leq 1$ gilt.

Da $\int \beta_1 p_k d\mu = 0$ ist, folgt aus (2), daß $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$

und somit auch f μ -fast überall konstant sind.

Umgekehrt erfüllen die μ -fast überall konstanten Funktionen die angegebene Orthogonalitätsbedingung, so daß (3) bewiesen ist.

(3) $\Rightarrow$ (4):

Da mit $v \in V$ auch die konjugiert komplexe Funktion $\bar{v}$ in V liegt, gilt $W := \operatorname{Re} V = \operatorname{Im} V \subset V$. W ist ein linearer Teilraum von $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$, der genau dann dicht in $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ liegt, wenn V ein dichter Teilraum von $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu)$ ist.

Ist dies nicht der Fall, so existiert eine N_1 -stetige Linearform $L \neq 0$ auf $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$, die auf W verschwindet. Es existiert daher eine μ -fast überall beschränkte Funktion

$f: Y \rightarrow \mathbb{R}$, so daß für alle $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$

$L(g) = \int f g \, d\mu$ gilt (vgl. Courrège [1], V.6.6.th.4).

Aus $L(\operatorname{Re} p_k) = L(\operatorname{Im} p_k) = 0$ folgt

$\int f p_k \, d\mu = \int f \operatorname{Re} p_k \, d\mu + i \int f \operatorname{Im} p_k \, d\mu = 0$ für alle $k \in \mathbb{K}$,
so daß nach (3) f μ -fast überall konstant ist.

Da $1 \in W$ ist, gilt $\int f \, d\mu = L(1) = 0$. Somit ist $f = 0$ μ -fast überall, was aber $L \neq 0$ widerspricht. Daher liegt V dicht in $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu)$.

(4) $\Rightarrow$ (1):

Sei $\mu \in M_e$. Dann gibt es zwei verschiedene Maße ν und ϱ aus M , so daß $\mu = \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\varrho$ ist. Es existiert eine Funktion $f \in C(Y)$ mit $\nu(f) \neq \varrho(f)$, also ein $\varepsilon > 0$ mit

$$|\varrho(f) - \nu(f)| > \varepsilon.$$

Aus (4) folgt die Existenz einer Funktion $g \in V$, so daß

$$\frac{1}{2} \int |f - g| \, d\nu + \frac{1}{2} \int |f - g| \, d\varrho = \int |f - g| \, d\mu < \frac{\varepsilon}{4} \text{ ist.}$$

Dann gilt $|\nu(g - f)| \leq \int |f - g| \, d\nu < \frac{\varepsilon}{2}$ und ebenso $|\varrho(f - g)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Da v und g in M liegen, stimmen sie auf V überein, so daß
 $\varepsilon < |g(f) - v(f)| \leq |g(f) - g(g)| + |g(g) - v(g)| + |v(g) - v(f)| < \varepsilon$
 ist. Aus diesem Widerspruch folgt, daß die Annahme $\mu \notin M_e$
 falsch war. Damit ist der Satz bewiesen. /

(5.3.) BEMERKUNGEN

(1) L bezeichne die eindeutig bestimmte Linearform auf dem linearen Teilraum V von $C(Y)$, die $L(1)=1$ und $L(p_k)=0$ für alle $k \in \mathbb{K}$ erfüllt. Dann kann M aufgefaßt werden als die Menge aller Fortsetzungen von L zu einem positiven Radonmaß auf Y .

Aus einer Bemerkung von Choquet [1, p.4-10] folgt, daß V für eine Fortsetzung $\mu \in \mathcal{M}_+(Y)$ von L nur dann dicht in $\mathcal{L}^1(\mu)$ liegen kann, wenn μ eine extremale Fortsetzung ist, d.h. wenn $\mu \in M_e$ gilt. Die Frage, ob diese Bedingung auch hinreichend ist, hat Douglas [1] unter sehr allgemeinen Voraussetzungen positiv beantworten können. Aus dem Theorem 1 von Douglas läßt sich die Äquivalenz der Aussagen (1) und (4) leicht ableiten.

(2) Die Menge M läßt sich auch folgendermaßen charakterisieren: Ein Maß $\mu \in \mathcal{M}_+^1(Y)$ liegt genau dann in M , wenn für alle $f \in C(Y)$ und alle $k \in \mathbb{K}$ $\mu(f + p_k) = \mu(f)$ gilt. Diese Kennzeichnung erlaubt es, die Äquivalenz der Aussagen (1) und (2) im vorangegangenen Satz auch mit einer Beweismethode zu zeigen, die in ähnlicher Form von Thoma [1, Satz 1] bei der Bestimmung von Extrempunkten invarianter Maße angewandt wurde.

(5.4.) KOROLLAR

Sei $\mu \in M$, $q \geq 1$ und $\bar{V}$ die abgeschlossene Hülle von V in $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^q(\mu)$. Gilt dann $p_m \in \bar{V}$ für alle $m \in \mathbb{N}_0^n$, so ~~ist~~ $\mu \in M_e$.

Beweis:

Sei W der (durch Linearkombination mit komplexen Koeffizienten) von allen Monomen p_m ($m \in \mathbb{Z}^n$) erzeugte lineare Teilraum von $C(Y)$. V liegt dicht in W , da mit $v \in V$ auch $\bar{v} \in V$ ist. W ist eine Unteralgebra von $C(Y)$, die mit $w \in W$ auch $\bar{w}$ enthält. Da W überdies die Punkte von W trennt und die Konstanten enthält, liegt W nach dem Satz von Stone-Weierstraß dicht in $C(Y)$ bezüglich gleichmäßiger Approximation, also auch bezüglich N_q . Schließlich ist $C(Y)$ dicht in $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^q(\mu)$, so daß V dicht in $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^q(\mu)$ liegt. Aus der Hölderschen Ungleichung folgt dann, daß V bezüglich N_1 dicht in $C(Y)$ und damit in $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^1(\mu)$ liegt, so daß $\mu \in M_e$ gilt (5.2.).

(5.5.) BEMERKUNG

Die Kennzeichnungen (5.2.) der Extrempunkte von M liefern offenbar keine Aussage über die Werte $\mu(p_m)$ eines extremalen Maßes $\mu \in M_e$ auf den Monomen und damit (vgl. 2.3.) keine Aussage über die Koeffizienten der μ kanonisch zugeordneten extremalen Funktion

$$f = \int Q(., y) \mu(dy) \in F_e.$$

Allerdings wird das Korollar (5.4.) die Berechnung gewisser extremaler Funktionen in F erlauben (vgl. 5.8.), und (5.2.) liefert eine interessante Aussage für extremale Funktionen in P (vgl. 6.5.).

Zunächst soll nun die Existenz bestimmter Extrempunkte bewiesen werden:

(5.6.) SATZ

Für jede Teilmenge $J \subset \mathbb{Z}^n$ bezeichne Ψ_J die Abbildung von der Menge $\mathcal{M}(Y)$ aller reellen Radonmaße auf Y in $\mathbb{T}^J$, die durch

$$\Psi_J: \mu \mapsto (\mu(p_j))_{j \in J} \quad \text{definiert wird.}$$

Dann existiert zu jedem extremalen Bildpunkt

$$\eta \in [\Psi_J(M)]_e \quad \text{ein extremales Maß } \mu \in M_e \text{ mit}$$

$$\Psi_J(\mu) = \eta, \text{ d.h. } \mu(p_j) = \eta_j \text{ für alle } j \in J.$$

Beweis:

Die Vektorräume $\mathcal{M}(Y)$ und $\mathbb{T}^J$ über dem Körper der reellen Zahlen sind lokal-konvex. Ψ_J ist (bzgl. der vagen Topologie auf $\mathcal{M}(Y)$) stetig und (affin-) linear. M ist eine konvexe, kompakte Teilmenge von $\mathcal{M}(Y)$. Daraus folgt die Behauptung (vgl. Bauer [2], Satz 2.2.3.).

(5.7.) Beispiel 1

Zu jeder komplexen Zahl β vom Betrage 1 und jedem $0 < m \in \mathbb{N}_0^n$ existiert ein extremales Maß $\mu \in M_e$, so daß für alle $q \in \mathbb{Z}$ $\mu(p_{qm}) = \beta^q$ gilt.

Insbesondere existiert zu jeder $\mathbb{K}$ nicht treffenden

'Geraden' (d.h. einfach erzeugten Untergruppe)

$G_m := \mathbb{Z} \cdot m$ ($0 < m \in \mathbb{N}_0^n$) in $\mathbb{Z}^n$ eine extremale Funktion $p \in P_e(2.6.)$, die auf G_m 'multiplikativ' ist.

Beweis:

(1) Für $m > 0$ und $\alpha \in \overline{\mathbb{X}}_1$ (1.1.) liegt die Funktion

$$f: x \mapsto \frac{1 + \bar{\alpha} x^m}{1 - \bar{\alpha} x^m} = 1 + 2 \sum_{q=1}^{\infty} \bar{\alpha}^q x^{qm} \quad \text{in } F \quad (1.6.).$$

Nach (2.3.) gilt für das kanonische Bild $\mu \in M$ von f :

$\mu(p_{qm}) = \alpha^q \quad (q \in \mathbb{N})$. Hieraus folgt mit den Bezeichnungen von (5.6.):

(2) Für $0 < m \in \mathbb{N}_0^n$, $J := G_m$ und $\beta \in Y_1$ ist

$$\Psi_{\{m\}}(M) = \overline{X_1} \quad \text{und} \quad (\beta^q)_{q \in \mathbb{Z}} \in \Psi_J(M).$$

(3) Sei $m > 0$, $J := G_m$ und $\beta \in Y_1$.

Nach (2) gilt $\eta := (\beta^q)_{q \in \mathbb{Z}} \in \Psi_J(M) \subset \prod_{j \in J} \overline{X_j}$ mit $\overline{X_j} := \overline{X_1}$ ($j \in J$).

Da $\beta \in Y_1 = (\overline{X_1})_e$ ein Extrempunkt der Kreisscheibe ist,

gilt $\eta \in (\prod_{j \in J} \overline{X_j})_e$, also $\eta \in [\Psi_J(M)]_e$.

Aus (5.6.) folgt dann, daß ein $\mu \in M_e$ existiert, so daß

$\mu(p_{qm}) = \beta^q$ für alle $q \in \mathbb{Z}$ gilt.

(4) Nach (2.7.) gibt es daher ein $p \in P_e$, so daß für $q, r \in \mathbb{Z}$

$p(qm + rm) = \beta^{q+r} = p(qm)p(rm)$ gilt.

(5.8.) Beispiel 2

Sei $n > 1$. Die einzigen Maße auf Y , die in M liegen und Produkte von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf Y_1 sind, entstehen

durch Multiplikation von $n-1$ Exemplaren des Haarschen

Maßes σ_1 auf Y_1 mit einem beliebigen Maß $\mu_k \in \mathcal{M}_+^1(Y_1)$. Sie

sind genau dann Extrempunkte von M , wenn μ_k eine Einheitsmasse ε_{y_k} ($y_k \in Y_1$) ist. Diesen Extrempunkten ent-

sprechen die extremalen Funktionen

$$x \mapsto \frac{y_k + x_k}{y_k - x_k} \quad \text{in } F_e.$$

Beweis:

(1) Sei $\mu := \sum_{i=1}^n \mu_i \in M$, $\mu_i \in \mathcal{M}_+^1(Y_1)$ für $i=1, \dots, n$.

$m := (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$ habe die Komponenten $m_j < 0$, $m_i > 0$ und $m_r = 0$ für alle $r \neq i, j$. Dann ist $m \in \mathbb{K}$ und folglich

$$\mu(p_m) = \mu_1(p_{m_i}) \mu_j(p_{m_j}) = 0$$

(dabei bezeichnet p_{m_i} die Abbildung

$y_1 \mapsto y_1^{m_i}$ von Y_1 in $\mathbb{C}$).

Ist $\mu_j(p_{m_j})=0$ für alle $m_j < 0$, so gilt dies auch für alle $m_j > 0$.

Nach (1.2.) ist dann $\mu_j = \sigma_1$.

Ist $\mu_j(p_{m_j}) \neq 0$ für ein $m_j < 0$, so ist $\mu_i(p_{m_i})=0$ für alle $m_i > 0$, also $\mu_i = \sigma_1$. Daher ist jedes Produktmaß in M vom angegebenen Typ. Andererseits liegen diese Maße stets in M .

(2) Sei $\mu = \sum_{i=1}^n \mu_i \in M$ mit $\mu_i = \sigma_1$ für alle $i \neq k$. Ist μ_k keine Einheitsmasse, so ist μ kein Extrempunkt.

Ist hingegen $\mu_k = \varepsilon_{y_k}$ für ein $y_k \in Y_1$, so sind die Voraussetzungen des Korollars (5.4.) für $q=2$ erfüllt, d.h. für $m \in \mathbb{N}_0^n$ gehören die Monome p_m zur abgeschlossenen Hülle von V in $\mathcal{L}^2_{\mathcal{A}}(\mu)$:

Ist nämlich e^k der k -te Einheitsvektor in $\mathbb{N}_0^n$ und m ein Vielfaches von e^k , etwa $m = m_k e^k$ mit $m_k \in \mathbb{N}_0$, so gilt wegen $\lambda := y_k^{m_k} \in V$:

$$\begin{aligned} \int |p_m - \lambda|^2 d\mu &= 2 - \int \bar{\lambda} p_m d\mu - \int \lambda p_{-m} d\mu = 2 - y_k^{-m_k} \int_{z_k}^{m_k} \varepsilon_{y_k}(dz_k) \\ &\quad - y_k^{m_k} \int_{z_k}^{-m_k} \varepsilon_{y_k}(dz_k) = 0. \end{aligned}$$

Ist aber $m = (m_1, \dots, m_n) \notin \mathbb{N}_0^n e^k$, so gibt es ein $j \neq k$ mit $m_j > 0$.

Dann ist

$l := m - (1+m_k)e^k \in \mathbb{N}_0^n$. Setzt man $\lambda := y_k^{1+m_k}$, so liegt die

Funktion λp_l in V , und es gilt

$$\begin{aligned} \int |p_m - \lambda p_l|^2 d\mu &= 2 - \int \bar{\lambda} p_{m-l} d\mu - \int \lambda p_{l-m} d\mu = \\ &= 2 - y_k^{-1-m_k} \int_{z_k}^{1+m_k} \mu_k(dz_k) - y_k^{1+m_k} \int_{z_k}^{-1-m_k} \mu_k(dz_k) = 0. \end{aligned}$$

Nach (5.4.) gilt daher $\mu \in M_e$.

(3) Sei $y_k \in Y_1$ und $\mu = \sum_{i=1}^n \mu_i \in M_e$ mit $\mu_i = \sigma_1$ für alle $i \neq k$, $\mu_k = \varepsilon_{y_k}$.

Dann ist

$$\mu(p_m) = \begin{cases} y_k^q, & m = q e^k \quad (q \in \mathbb{Z}) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Nach (2.3.) ist μ Bild der Funktion

$$f: x \rightsquigarrow 1 + 2 \sum_{q=1}^{\infty} x_k^q y_k^{-q} = \frac{1+x_k y_k^{-1}}{1-x_k y_k^{-1}} = \frac{y_k+x_k}{y_k-x_k} \quad \text{aus } F_e.$$

Daß diese Funktionen extremal sind, läßt sich auch leicht direkt beweisen:

Sind $f', f'' \in F$ so gewählt, daß $f = \frac{1}{2} f' + \frac{1}{2} f''$ ist, so gilt für die Koeffizienten dieser Funktionen:

$$\frac{1}{2} f'_{e,k} + \frac{1}{2} f''_{e,k} = 2y_k^{-1}. \text{ Wegen}$$

$$\left| \frac{1}{2} f'_{e,k} \right|, \left| \frac{1}{2} f''_{e,k} \right| \leq 1 \quad (2.3.) \text{ folgt hieraus}$$

$$f'_{e,k} = f''_{e,k} = 2y_k^{-1}. \text{ Sind } b' \text{ und } b'' \text{ die } f' \text{ und } f'' \text{ gemäß}$$

(1.6.) zugeordneten Bilder in B mit Koeffizienten (b'_m) bzw.

(b''_m) , so ist nach (1.7.)

$$b'_{e,k} = b''_{e,k} = y_k^{-1}, \text{ und aus der Koeffizientenabschätzung (1.8.)}$$

folgt dann $b' = b''$, also $f' = f''$.

(5.9.) BEMERKUNGEN

(1) M ist stabil unter der Faltung mit beliebigen Maßen aus $\mathcal{M}_+^1(Y)$.

(2) Die Faltung zweier extremaler Maße in M liefert im Falle $n > 1$ im allgemeinen kein extremales Maß (für $n=1$ hingegen ist $M_e * M_e \subset M_e$).

(3) Während man für $n=1$ alle Maße aus M_e durch Faltung eines beliebigen extremalen Maßes mit gewissen Maßen aus $\mathcal{M}_+^1(Y)$ (nämlich den Einheitsmassen) erhält, ist eine entsprechende Behauptung für $n > 1$ falsch.

(4) Die Menge P (2.6.) ist unter punktwieser Multiplikation mit normierten positiv definiten Funktionen stabil.

(5) Die Menge F (1.5.) ist stabil unter der folgenden Verknüpfung mit Funktionen aus F : Sind

$$f: x \rightsquigarrow 1 + 2 \sum_{m \geq 0} a_m x^m \quad \text{und}$$

$$f': x \rightsquigarrow 1 + 2 \sum_{m \geq 0} a'_m x^m \quad \text{Funktionen aus } F, \text{ so gilt}$$

dies auch für die Funktion

$$x \rightsquigarrow 1 + 2 \sum_{m \geq 0} a_m a'_m x^m$$

(für den Fall $n=1$ vgl. Schur [2, §10]).

Beweise:

(1) Für $\mu, \nu \in \mathcal{M}_+^1(Y)$ und $m \in \mathbb{Z}^n$ ist

$$(\mu * \nu)(p_m) = \iint (yz)^m \mu(dy) \nu(dz) = \mu(p_m) \nu(p_m). \text{ Daraus folgt die Behauptung.}$$

(2) Man wähle etwa zwei verschiedene Punkte $y_1, y_2 \in Y_1$ und setze $\mu := \varepsilon_{y_1} \otimes \sigma_1 \otimes \dots \otimes \sigma_1$, $\nu := \sigma_1 \otimes \varepsilon_{y_2} \otimes \sigma_1 \otimes \dots \otimes \sigma_1$.

Dann sind $\mu, \nu \in M_e$ (5.8.). Jedoch ist $\mu * \nu = \sigma$, und das Haarsche Maß ist nach (5.8.) nicht extremal.

(3) Wählt man μ und ν wie im Beweis von (2), so ist für jedes Maß $\tau \in \mathcal{M}_+^1(Y)$ und $m := e^1 := (1, 0, \dots, 0)$

$$(\nu * \tau)(p_m) = 0 \neq \mu(p_m), \text{ also } \mu \neq \nu * \tau \text{ für alle } \tau \in \mathcal{M}_+^1(Y).$$

(4) Die in (2.7.) definierte Abbildung $\mu \rightsquigarrow \hat{\mu}$ ist nach dem Satz von Bochner eine Bijektion von $\mathcal{M}_+^1(Y)$ auf die Menge aller auf $\mathbb{Z}^n$ positiv definiten Funktionen, die im Nullpunkt zu 1 normiert sind. Da für $\mu, \nu \in \mathcal{M}_+^1(Y)$

$\widehat{\mu * \nu} = \hat{\mu} \cdot \hat{\nu}$ gilt und P das Bild von M ist, folgt die Behauptung aus (1).

(5) Sind $f, f' \in F$ und p, p' ihre Bilder in P , so gilt nach (2.8.) für die Koeffizienten (f_m) bzw. (f'_m) von f bzw. f' :

$$f_m = 2 \overline{p(m)}, \quad f'_m = 2 \overline{p'(m)} \quad (0 < m \in \mathbb{N}_0^n).$$

Nach (4) liegt die Funktion

$q: m \rightsquigarrow p(m)p'(m)$ in P ; ihr Bild $g \in F$ hat die Koeffizienten $g_0 = 1$ und $g_m = 2p(m)p'(m) = 2a_m a'_m \quad (m > 0)$. /

(5.10.) Beispiel 3

Für $0 < m \in \mathbb{N}_0^n$ und $\beta \in Y_1$ liegt die Funktion

$f: x \rightsquigarrow \frac{1+\beta x^m}{1-\beta x^m}$ genau dann in F_e , wenn $|\beta| = 1$ ist.

Beweis:

Sei $m = (m_1, \dots, m_n)$. Für $1 = |\beta| = \sum_{k=1}^n m_k$ ist $f \in F_e$ nach (5.8.).

Sei nun $|\beta| > 1$ und $\eta \in Y_1$ so gewählt, daß $\eta^2 = \beta$ ist.

Es gibt ein $j \in \mathbb{N}_0^n$ mit $0 < j < m$. Sei q das Polynom

$$q: x \rightsquigarrow \frac{1}{2} x^j + \frac{1}{2} x^{m-j} + \eta x^m.$$

Mit den Bezeichnungen von (1.10.) ist dann

$$q^*(x) = \frac{\eta}{2} x^j + \frac{1}{2} x^{m-j} \neq 0 \text{ für alle } x \in X, \text{ also}$$

$s := \frac{q}{q^*} \in B$ eine Schrankenfunktion. Daher liegt die Funktion

$$f': x \rightsquigarrow \frac{1+s(x)}{1-s(x)} = \frac{q^*(x)+q(x)}{q^*(x)-q(x)} = \frac{\eta + x^j + x^{m-j} + \eta x^m}{\eta - \eta x^m} \quad \text{in } F.$$

Ebenso liegt

$$f'': x \rightsquigarrow \frac{\eta - x^j - x^{m-j} + \eta x^m}{\eta - \eta x^m} \quad \text{in } F, \text{ und es gilt}$$

$$f = \frac{1}{2} f' + \frac{1}{2} f''. \text{ Daher ist } f \text{ nicht extremal. /}$$

(5.11.) SATZ

Die folgenden Aussagen sind äquivalent und genau für $n=1$ richtig:

- (1) $M_e \subset \{\mu \in M: |\mu(p_m)| = 0 \text{ oder } 1 \text{ für alle } m \in \mathbb{N}^n\}$.
- (2) $F_e \subset \{f \in F: |f_m| = 0 \text{ oder } 2 \text{ für alle } 0 < m \in \mathbb{N}_0^n\}$.
- (3) $F_e \subset \{x \rightsquigarrow \frac{1+\beta x^m}{1-\beta x^m} \quad (x \in X) : \beta \in Y_1, 0 < m \in \mathbb{N}_0^n\}$.

$$(4) F_e \subset \left\{ x \rightsquigarrow \frac{y_k + x_k}{y_k - x_k} \quad (x \in X) : 1 \leq k \leq n, y_k \in Y_1 \right\}.$$

$$(5) F_e = \left\{ x \rightsquigarrow \frac{y_k + x_k}{y_k - x_k} \quad (x \in X) : 1 \leq k \leq n, y_k \in Y_1 \right\}.$$

Beweis:

(1) $\Leftrightarrow$ (2) gilt nach (2.3.).

(2) $\Rightarrow$ (3):

Sei $f \in F_e$ und $|f_1| = 0$ oder 2 für $0 < l \in \mathbb{N}_0^n$. Da die konstante Funktion 1 nicht extremal ist, existiert ein $l > 0$ mit $|f_1| = 2$. Unter allen $j \in \mathbb{N}_0^n$ mit $0 < j \leq l$ und $|f_j| = 2$ gibt es ein minimales Element m , das durch die Eigenschaften

$|f_m| = 2$ und $f_j = 0$ für alle $0 < j < m$ gekennzeichnet ist.

Für den Koeffizienten b_m der Bildfunktion $b \in B$ von f gilt dann nach (1.7.): $|b_m| = 1$. Aus (1.8.) folgt daher, daß $b_j = 0$ für alle $j \neq m$ ist. Somit existiert eine Zahl β vom Betrage 1, so daß $f(x) = \frac{1 + \beta x^m}{1 - \beta x^m}$ für alle $x \in X$ gilt.

(3) impliziert offenbar (2).

(3) $\Leftrightarrow$ (4) gilt nach (5, 10.).

(4) $\Leftrightarrow$ (5) folgt aus dem Satz von Krein-Milman sowie aus der Holomorphie der Abbildungen

$\varphi_{y_k} : (x_1, \dots, x_n) \rightsquigarrow (x_1, \dots, x_{k-1}, y_k x_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$ und $\varphi_{y_k}^{-1}$ ($1 \leq k \leq n, y_k \in Y_1$) von X in sich: Mit $f \in F_e$ ist auch $f \circ \varphi_{y_k} \in F_e$.

Der Satz von Herglotz (2.5.) besagt, daß die Aussagen für $n=1$ richtig sind. Für $n>1$ ist aber zum Beispiel (5) falsch, wie man leicht aus (4.5.) ersieht: Die zu F gehörige Funktion $f: x \rightsquigarrow \frac{1+x_1 \dots x_n}{1-x_1 \dots x_n}$ läßt sich nicht koeffizientenweise durch Konvexkombinationen von Funktionen des in (5) angegebenen Typs approximieren. /

§ 6 Multiplikative Extremalpunkte

Dieser letzte Abschnitt soll sich mit der Frage beschäftigen, ob eine Kennzeichnung der Extremalpunkte einer der Mengen F , M oder P gefunden werden kann, die auch für den Fall mehrerer Variablen eine Lösung des Koeffizientenproblems für F im Sinne von (4.2.) erlaubt. Im vorigen Abschnitt war die Menge M_e bestimmt worden, ohne daß sich daraus eine Aussage für die Koeffizienten extremer Funktionen in F ergab (5.5.).

Im Hinblick auf eine Lösung des Koeffizientenproblems scheint eine Untersuchung der Menge P_e am aussichtsreichsten zu sein. Die Vermutung, daß sich die extremalen Funktionen aus P - ähnlich wie bei anderen Funktionen auf Halbgruppen - durch eine Multiplikativitätseigenschaft kennzeichnen lassen, wurde bisher nur für den Fall $n=1$ bestätigt. P_e stimmt in diesem Fall mit der Menge der Charaktere überein.

Zunächst sei bemerkt, daß man im allgemeinen nicht erwarten kann, daß eine Funktion $p \in P_e$ auf $\mathbb{Z}^n$ multiplikativ ist, d.h. der Funktionalgleichung

$$p(j+m) = p(j) p(m) \quad (\text{für } j, m \in \mathbb{Z}^n) \text{ genügt.}$$

Dann wäre nämlich $|p(k)| = 1$ insbesondere für alle $k \in \mathbb{K}$, was für $n > 1$ im Widerspruch zur Definition von P steht.

Auch ist für $n > 1$ nicht jeder Extremalpunkt von P auf $\mathbb{N}_0^n$ multiplikativ (vgl. 6.13.). Hingegen ist dem Verfasser bisher noch kein Extremalpunkt bekannt, der nicht auf einer in $\mathbb{Z}^n \setminus \mathbb{K}$ gelegenen 'Geraden' $G_m := \mathbb{Z} \cdot m$ ($m > 0$) multiplikativ wäre. Eine interessante Frage ist daher, ob jeder Extremal-

punkt von P diese Eigenschaft besitzt.

(6.1.) DEFINITION

Für $0 < m \in \mathbb{N}_0^n$ sei $G_m := \mathbb{Z} \cdot m$ die von m erzeugte 'Gerade' in $\mathbb{Z}^n \setminus \mathbb{K}$ und $S_m := \bigcup_{0 \leq j \leq m} (j + G_m)$ der von m erzeugte 'Streifen' um G_m . Eine Funktion $p \in P$ werde als multiplikativ auf G_m bezeichnet, wenn $p(qm) = (p(m))^q$ für alle $q \in \mathbb{Z}$ gilt.

(6.2.) LEMMA

Für $0 < m \in \mathbb{N}_0^n$ ist $\mathbb{K} + G_m = \mathbb{Z}^n \setminus S_m$.

Beweis:

Zunächst sieht man leicht ein, daß $S_m \subset \mathbb{Z}^n \setminus \mathbb{K}$ ist.

Wäre nun $(\mathbb{K} + G_m) \cap S_m \neq \emptyset$, so wäre auch $\mathbb{K} \cap S_m \neq \emptyset$.

Daher ist $\mathbb{K} + G_m \subset \mathbb{Z}^n \setminus S_m$.

Umgekehrt soll gezeigt werden, daß $(\mathbb{K} + G_m) \subset S_m$ ist.

Sei dazu $j \notin \mathbb{K} + G_m$. Dann ist $j \notin \mathbb{K}$, also $j \geq 0$ oder $j \leq 0$.

Wegen $S_m = -S_m$ und $\mathbb{K} = -\mathbb{K}$ kann o.B.d.A. angenommen werden, daß $j \geq 0$ ist.

Da $j - m$ nicht in $\mathbb{K}$ liegt, gilt $j \leq m$ (und somit $j \in S_m$) oder aber $m \leq j$. In diesem Fall existiert eine Zahl $q \in \mathbb{N}_0$, für die $m \leq j - qm$ und $m \nmid j - (q+1)m$ gelten. Daher ist entweder $0 \leq j - (q+1)m \leq m$ oder

$j - (q+2)m \in \mathbb{K}$.

Aus $0 \leq j - (q+1)m \leq m$ folgt $j = j - (q+1)m + (q+1)m \in S_m$.

Der zweite Fall kann nicht eintreten, denn aus

$j - (q+2)m \in \mathbb{K}$ folgt $j \in \mathbb{K} + G_m$ im Widerspruch zur Voraussetzung./

(6.3.) LEMMA

Sei $0 < m \in \mathbb{N}_0^n$. Eine Funktion $p \in P$ ist genau dann auf der Geraden G_m multiplikativ, wenn $|p(m)| = 1$ ist.

Beweis:

Aus $p(qm+lm) = p(qm) p(lm)$ für alle $q, l \in \mathbb{Z}$ folgt

$$1 = p(0) = p(m) \cdot p(-m) = |p(m)|^2, \text{ da } \overline{p(m)} = p(-m) \text{ ist.}$$

Sei umgekehrt $p(m) = \beta \in Y_1$. Es genügt zu zeigen, daß für $q \in \mathbb{N}$ $p(qm) = \beta^q$ ist, denn daraus folgt

$$p(-qm) = \overline{p(qm)} = \overline{\beta^q} = \beta^{-q} \text{ für alle } q \in \mathbb{N} \text{ und somit}$$

$$p(qm+lm) = p(qm)p(lm) \text{ für alle } q, l \in \mathbb{Z}.$$

Die Behauptung läßt sich durch vollständige Induktion nach q zeigen. Für ein $q \in \mathbb{N}$ sei $p(qm) = \beta^q$. Da p positiv definit ist, folgt für

$$m^1 := 0, m^2 := qm, m^3 := (q+1)m \text{ und}$$

$$c_1 := \overline{\beta} p((q+1)m) - \beta^q, c_2 := 1, c_3 := -\overline{\beta} \text{ aus}$$

$$\sum_{i,j=1}^3 p(m^i - m^j) c_i \overline{c_j} \geq 0, \text{ da } -|c_1|^2 \geq 0 \text{ ist, also}$$

$$p((q+1)m) = \beta^{q+1} \text{ gilt.} //$$

(6.4.) LEMMA

Sei $\alpha \in m \in \mathbb{N}_0^n$ und $p \in P$ auf G_m multiplikativ. Dann gelten:

$$(1) p(j+qm) = p(j) p(qm) = p(j) p(m)^q \text{ für alle } j \in \mathbb{Z}^n, q \in \mathbb{Z}.$$

$$(2) p(j) = 0 \text{ für alle } j \in \mathbb{Z}^n \setminus S_m.$$

Beweis:

(1) Nach (6.3.) gibt es ein $\beta \in Y_1$, so daß für alle $q \in \mathbb{Z}$

$$p(qm) = \beta^q \text{ gilt. Sei } j \in \mathbb{Z}^n \text{ und } q \in \mathbb{Z}.$$

Ist $p(j+qm) = 0$, so setze man

$$m^1 := 0, m^2 := j, m^3 := j+qm \text{ und}$$

$$c_1 := p(j), c_2 := -1, c_3 := \overline{\beta^q}.$$

Ist $p(j+qm) \neq 0$, so setze man

$$m^1 := 0, m^2 := j, m^3 := j+qm \text{ und}$$

$$c_1 := |p(j+qm)|^2 - \overline{p(j+qm)} p(j) \beta^q, c_2 := \beta^q \overline{p(j+qm)}, c_3 := -\overline{p(j+qm)}.$$

In beiden Fällen folgt aus

$$\sum_{i,k=1}^3 p(m^i - m^k) c_i \overline{c_k} > 0, \text{ da\ss } -|c_1|^2 > 0 \text{ ist, also}$$

$$p(j+qm) = p(j)\beta^q \text{ gilt.}$$

(2) Sei $j \in \mathbb{Z}^n \setminus S_m$. Nach (6.2.) gibt es dann ein $k \in \mathbb{K}$ und ein $q \in \mathbb{Z}$, so da\ss $j = k + qm$ ist. Nach (1) folgt dann wegen $p(k) = 0$ die Behauptung. //

Die beiden vorangegangenen Hilfssätze und die Kennzeichnung (5.2.) der extremalen Ma\ss e in M ermöglichen es, eine Reihe von Bedingungen anzugeben, die zur Multiplikativit\t extremaler Funktionen aus P \tquivalent sind:

(6.5.) SATZ

F\t ein extremales Ma\ss $\mu \in M_e$ und sein kanonisches

Bild $\hat{\mu} \in P_e$ sind die folgenden Eigenschaften \tquivalent:

- (1) $\hat{\mu}$ ist auf einer Geraden G_m ($m > 0$) multiplikativ.
- (2) $\hat{\mu}$ verschwindet au\ss erhalb eines Streifens S_m ($m > 0$).
- (3) $\hat{\mu}$ verschwindet auf einer Menge $m + \mathbb{K}$ ($m > 0$).
- (4) $|\hat{\mu}|$ nimmt den Wert 1 au\ss erhalb des Nullpunkts an, d.h. es existieren ein $m > 0$ in $\mathbb{N}_0^n$ und ein $\beta \in Y_1$ mit $\hat{\mu}(m) = \beta$.
- (5) Es gibt ein μ -fast \tberall konstantes Monom p_m ($m > 0$), d.h. es existieren ein $m > 0$ und ein $\beta \in Y_1$, so da\ss $y^m = \beta$ f\t μ -fast alle $y \in Y$ gilt.
- (6) Es gibt ein $m > 0$ und ein $\beta \in Y_1$, so da\ss f\t den Tr\tger $T(\mu)$ von μ gilt: $T(\mu) \subset p_m^{-1}(\beta)$.
- (7) Es gibt ein $y \in Y$ und eine abgeschlossene, echte Untergruppe E von Y , so da\ss der Tr\tger $T(\mu)$ in der Nebenklasse $y \cdot E$ enthalten ist.
- (8) Die Faltungspotenzen von μ konvergieren nicht vag gegen das Haarsche Ma\ss σ auf Y .

Beweis:

(1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3): gilt nach (6.4.2.) und (6.2.).

(3) $\Rightarrow$ (4): Sei $0 < m \in \mathbb{N}_0^n$. Aus

$$0 = \hat{\mu}(m+k) = \mu(p_{m+k}) = \int p_m p_k d\mu \quad \text{für alle } k \in \mathbb{K} \text{ folgt}$$

mit Hilfe des Satzes (5.2.), daß die beschränkte Funktion p_m μ -fast überall konstant ist. Es existiert daher ein $\beta \in Y_1$ mit

$$\hat{\mu}(m) = \int p_m d\mu = \int \beta d\mu = \beta.$$

(4) $\Rightarrow$ (5): Sei $m > 0$ und $\beta \in Y_1$, so daß $\hat{\mu}(m) = \beta$ ist.

Aus $|p_m| \leq 1$ und $\int p_m d\mu = \hat{\mu}(m) = \beta \in Y_1$ folgt, daß μ -fast überall $p_m = \beta$ gilt.

(5) $\Rightarrow$ (6): Sei $m > 0$, $\beta \in Y_1$ und $E_{m,\beta}$ die abgeschlossene Menge

$p_m^{-1}(\beta)$. Aus $p_m = \beta$ μ -fast überall folgt $\mu(E_{m,\beta}) = 0$, also

$$T(\mu) \subset E_{m,\beta}.$$

(6) $\Rightarrow$ (7): Für $m > 0$ und $\beta \in Y_1$ sei $T(\mu) \subset E_{m,\beta}$.

$E := E_{m,1}$ ist eine abgeschlossene Untergruppe von Y .

Da zu $m \neq 0$ stets ein $y \in Y$ existiert, so daß $y^m \neq 1$ ist, gilt $E \neq Y$.

Nun ist der Träger von μ und somit auch $E_{m,\beta}$ nicht leer,

und für jedes $y \in E_{m,\beta}$ ist $E_{m,\beta} = y \cdot E$. Daraus folgt (7).

(7) $\Rightarrow$ (8): Dieser Beweis wird ähnlich wie bei Grenander [1]

(Note 3.2.1, p.194) geführt:

Sei E eine abgeschlossene, echte Untergruppe von Y und

$T(\mu) \subset y \cdot E$ für ein $y \in Y$.

$v := s(\mu)$ sei das Bild von μ unter der Spiegelung

$s: y \rightsquigarrow y^{-1}$ von Y . Dann ist $T(v) \subset y^{-1} \cdot E$, und für

$g := \mu * v$ gilt (Grenander [1], th.2.2.2.): $T(g) = T(\mu) \cdot T(v)$, also

$$T(g) \subset y \cdot E \cdot y^{-1} \cdot E = E.$$

Da das Bild $\hat{\sigma}$ des Haarschen Maßes σ in P die Funktion

$$\hat{\sigma}: m \rightsquigarrow \begin{cases} 1, & m=0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist, folgt aus der Homöomorphie (2.7.) von M und P sowie der Eigenschaft

$\widehat{\mu_1 * \mu_2} = \widehat{\mu_1} \cdot \widehat{\mu_2}$ für $\mu_1, \mu_2 \in M$, daß die Faltungspotenzen μ^{*q} für $q \rightarrow \infty$ genau dann vag gegen σ konvergieren, wenn (in der Topologie der punktweisen Konvergenz) $\lim_{q \rightarrow \infty} \widehat{\mu}^q = \widehat{\sigma}$ gilt. Dies ist aber genau dann der Fall, wenn $|\widehat{\mu}(m)| < 1$ für alle $m \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ gilt.

Es sei nun angenommen, daß die Faltungspotenzen von μ vag gegen σ konvergieren. Dann gilt

$$\begin{aligned} |\widehat{\sigma}(m)| &= |\widehat{\mu}(m) \cdot \widehat{\nu}(m)| = \left| \int p_m(y) \mu(dy) \cdot \int p_m \circ s(y) \mu(dy) \right| = \\ &= \left| \int y^m \mu(dy) \int y^{-m} \mu(dy) \right| = |\widehat{\mu}(m)|^2 < 1 \text{ für alle } 0 \neq m \in \mathbb{Z}^n. \end{aligned}$$

Somit gilt auch

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \sigma^{*q} = \sigma. \text{ Dies ist aber nicht möglich, da}$$

$$T(\sigma^{*q}) \subset E^q = E \neq Y \text{ für alle } q \in \mathbb{N} \text{ und } T(\sigma) = Y \text{ ist.}$$

Die Annahme war also falsch, und (8) ist erfüllt.

(8) $\Rightarrow$ (1): Aus (8) folgt die Existenz eines $m \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ mit

$|\widehat{\mu}(m)| = 1$. Da $\widehat{\mu}(k) = 0$ für alle $k \in \mathbb{K}$ und $|\widehat{\mu}(m)| = |\widehat{\mu}(-m)|$ ist, kann o.B.d.A. $m > 0$ angenommen werden. Aus (6.3.) folgt dann (1). /

Die auf einer Geraden multiplikativen Funktionen aus P sollen genauer untersucht werden. Dazu dient die folgende

(6.6.) DEFINITION

Für $0 < m \in \mathbb{N}_0^n$ und $B \in Y_1$ seien

$$\begin{aligned} P_m^B &:= \left\{ p \in P : p(m) = B \right\}, \\ F_m^B &:= \left\{ f \in F : f(x) = \frac{1+2 \sum_{0 < j < m} r_j x^j + \overline{B} x^m}{1 - \overline{B} x^m} \quad (x \in X), \quad r_j = \overline{B r_{m-j}} \in \mathbb{C} \text{ für } 0 < j < m \right\}, \\ R_m^B &:= \left\{ r : X \rightarrow \mathbb{C}, \quad r(x) = 1 + \sum_{0 < j < m} r_j x^j \neq 0 \text{ für alle } x \in X, \quad r_j = \overline{B r_{m-j}} \in \mathbb{C} \right. \\ &\quad \left. (0 < j < m) \right\}. \end{aligned}$$

Nach (6.3.) ist $\bigcup_{B \in Y_1} P_m^B$ die Menge aller Funktionen aus P , die auf der Geraden G_m multiplikativ sind.

(6.7.) SATZ

Sei $0 < m \in \mathbb{N}_0^n$ und $\beta \in Y_1$. Dann sind P_m^β , F_m^β und R_m^β konvexe, kompakte Teilmengen von P , F bzw $C(X)$. Die kanonische Abbildung von P auf F induziert einen algebraischen und topologischen Isomorphismus von P_m^β auf F_m^β . Ordnet man jeder Funktion

$$x \rightsquigarrow \frac{1+2 \sum_{0 < j < m} r_j x^j + \bar{\beta} x^m}{1 - \bar{\beta} x^m} \quad \text{aus } F_m^\beta \quad \text{als Bild die Funktion}$$

$$x \rightsquigarrow 1 + \sum_{0 < j < m} r_j x^j \quad (x \in X) \text{ zu, so sind } F_m^\beta \text{ und } R_m^\beta$$

bezüglich dieser Abbildung algebraisch und topologisch isomorph.

Beweis:

(1) P_m^β ist konvex und (in der Topologie der punktweisen Konvergenz) abgeschlossen, also kompakt. Unter der kanonischen Abbildung von P auf F ist F_m^β das Bild von P_m^β , denn:

Für $f \in F_m^\beta$ mit Koeffizienten (f_j) und Bild $p \in P$ gilt nach (2.8.):

$$p(m) = \frac{1}{2} \bar{f}_m = \beta, \text{ also } p \in P_m^\beta.$$

Umgekehrt ist für $p \in P_m^\beta$ nach (6.4.):

$$p(qm) = \beta^q, \quad p(j+qm) = p(j)\beta^q \quad (0 < j < m, q \in \mathbb{N}_0).$$

Setzt man für $0 < j < m$ $r_j := \overline{p(j)}$, so gilt

$$r_j = p(-m+m-j) = \bar{\beta} p(m-j) = \overline{\beta r_{m-j}}.$$

Sei f das Bild von p in F . Nach (2.8.) und (6.4.2.) gilt dann für alle $x \in X$:

$$\begin{aligned} f(x) &= 1+2 \sum_{q=1}^{\infty} \overline{p(qm)} x^{qm} + 2 \sum_{0 < j < m} \sum_{q=0}^{\infty} \overline{p(j+qm)} x^{j+qm} = \\ &= 1+2 \sum_{q=1}^{\infty} \bar{\beta}^q x^{qm} + 2 \sum_{0 < j < m} \sum_{q=0}^{\infty} r_j \bar{\beta}^q x^{j+qm} = \frac{1+2 \sum_{0 < j < m} r_j x^j + \bar{\beta} x^m}{1 - \bar{\beta} x^m}. \end{aligned}$$

Daher liegt f in F_m^β .

Da P und F isomorph sind, gilt dies auch für P_m^β und F_m^β .

(2) Sei nun

$$f: x \rightsquigarrow \frac{1+2 \sum_{0 \leq j < m} r_j x^j + \bar{\beta} x^m}{1 - \bar{\beta} x^m} \quad \text{aus } F_m^\beta \quad \text{und}$$

$$r: x \rightsquigarrow 1 + \sum_{0 \leq j < m} r_j x^j.$$

Für alle $x \in X$ ist $r(x) \neq 0$, denn aus $r(x) = 0$ für ein $x \in X$ folgt

$$2 \sum_{0 \leq j < m} r_j x^j = -2, \text{ also } f(x) = \frac{1 + \bar{\beta} x^m - 2}{1 - \bar{\beta} x^m} = -1$$

im Widerspruch zu $\operatorname{Re} f(x) \geq 0$.

Daher ist $r \in R_m^\beta$. Die Abbildung von F_m^β in R_m^β ist injektiv.

Sie ist überdies eine Surjektion und damit bijektiv:

Sei $r: x \rightsquigarrow 1 + \sum_{0 \leq j < m} r_j x^j$ eine Funktion aus R_m^β und $\alpha \in Y_1$

so gewählt, daß $\alpha^2 = \beta$ ist. Dann ist für alle $x \in X$

$$\alpha(1 + \sum_{0 \leq j < m} r_j x^j) \neq 0, \text{ und wegen}$$

$$\alpha r_j = \alpha \bar{\beta} r_{m-j} = \overline{\alpha r_{m-j}} \quad \text{ist}$$

$$s: x \rightsquigarrow \frac{\sum_{0 \leq j < m} \alpha r_j x^j + \bar{\alpha} x^m}{\alpha + \sum_{0 \leq j < m} \alpha r_j x^j} \quad \text{eine Schrankenfunktion (1.10.) in } X.$$

Nach (1.6.) ist dann $f = \frac{1+s}{1-s} \in F$. Wegen

$$f(x) = \frac{\alpha + 2 \sum_{0 \leq j < m} \alpha r_j x^j + \bar{\alpha} x^m}{\alpha - \bar{\alpha} x^m} = \frac{1 + 2 \sum_{0 \leq j < m} r_j x^j + \bar{\beta} x^m}{1 - \bar{\beta} x^m}$$

liegt f sogar in F_m^β ; r ist das Bild von f .

Die Bijektion von F_m^β auf R_m^β ist affin-linear und stetig. Da F_m^β kompakt ist, sind F_m^β und R_m^β isomorph.

(6.8.) BEMERKUNG

Jede Funktion aus F_m^β ist Bild einer Schrankenfunktion aus B_e unter der kanonischen Abbildung von B auf F . $\bigcup_{0 \leq m \in \mathbb{N}_0} \bigcup_{\beta \in Y_1} F_m^\beta$ ist die Menge aller Funktionen aus F , die einen Koeffizienten vom Betrage 2 besitzen.

Es soll nun gezeigt werden, daß die auf einer Geraden multiplikativen Extremalpunkte von P gerade die Extremalpunkte der Mengen P_m^β ($0 < m \in \mathbb{N}_0^n$, $\beta \in Y_1$) sind. Schärfer gilt der

(6.9.) SATZ

Für $0 < m \in \mathbb{N}_0^n$, $\beta \in Y_1$ und $q \in \mathbb{N}$ ist

$$(P_m^\beta)_e = P_m^\beta \wedge (P_{qm}^{\beta^q})_e = P_m^\beta \wedge P_e.$$

Ein entsprechender Satz gilt für die Menge F (6.7.)

Beweis:

Aus $P_m^\beta \subset P_{qm}^{\beta^q} \subset P$ folgt $P_m^\beta \wedge P_e \subset P_m^\beta \wedge (P_{qm}^{\beta^q})_e \subset (P_m^\beta)_e$.

Sind umgekehrt $p \in (P_m^\beta)_e$ und $p_1, p_2 \in P$ mit der Eigenschaft

$p = \frac{1}{2} p_1 + \frac{1}{2} p_2$, so gilt wegen $|p_1| \leq 1$ und $|p(m)| = 1$, daß

$p_1, p_2 \in P_m^\beta$ und somit $p_1 = p_2 = p$ gilt. Daher ist $(P_m^\beta)_e \subset P_m^\beta \wedge P_e$.

(6.10.) BEMERKUNG

Die beiden vorangegangenen Sätze erlauben es, die auf einer Geraden multiplikativen Extremalpunkte von P durch Berechnung der Extremalpunkte von konvexen, kompakten Mengen R_m^β in einem endlich dimensionalen Vektorraum zu bestimmen. Dies ist zumindest in einigen Fällen möglich, wie die folgenden Beispiele zeigen:

(6.11.) Beispiel 1

Sei $\beta \in Y_1$ und $0 < m \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|m| = 1$, also ein Einheitsvektor.

Dann sind R_m^β , F_m^β und P_m^β einpunktig, also mit ihrem Extremalpunkt identisch. Für F_m^β erhält man die in (5.10.) angegebene extremale Funktion

$$f: x \rightsquigarrow \frac{1 + \bar{\beta}x^m}{1 - \bar{\beta}x^m} \quad \text{aus } F_e.$$

Für $n=1$ ist $F_e = \bigcup_{\beta \in Y_1} F_1^\beta$, also $P_e = \bigcup_{\beta \in Y_1} P_1^\beta = \bigcup_{\beta \in Y_1} (P_1^\beta)_e$.

(6.12.) Beispiel 2

Sei $n > 1$, $\beta \in Y_1$ und $m = e^i + e^j$ ($i \neq j$), wobei e^k den k -ten Einheitsvektor in $\mathbb{N}_0^n$ bezeichnet. Dann ist

$$(R_m^\beta)_e = \left\{ r: X \rightarrow \mathbb{R}, r(x) = 1 + \frac{\alpha}{2}x_i + \frac{\overline{\alpha}\beta}{2}x_j : \alpha \in Y_1 \right\}.$$

Zu jeder Funktion $r \in (R_m^\beta)_e$ existiert nämlich ein $\alpha \in \overline{Y_1}$, so daß

$$r(x) = 1 + \frac{\alpha}{2}x_i + \frac{\overline{\alpha}\beta}{2}x_j \quad \text{für } x \in X \text{ gilt. Man sieht sofort, daß}$$

$r \in (R_m^\beta)_e$ mit $\alpha \in Y_1$ gleichbedeutend ist.

Nach (6.7.) und (6.9.) sind daher die Funktionen

$$f: x \rightsquigarrow \frac{1 + \alpha x_i + \alpha \beta x_j + \overline{\beta} x_i x_j}{1 - \overline{\beta} x_i x_j} \quad \text{extremal in } F. \quad (1 \leq i \neq j \leq n; \alpha, \beta \in Y_1).$$

Die Menge der auf G_m multiplikativen Extrempunkte $p \in P_e$

ist dann gegeben durch die Funktionen

$$p(l) := \begin{cases} \beta^q & , l = qm \\ \frac{\alpha}{2} \beta^q & , l = e^i + qm \\ \frac{\alpha}{2} \beta^{q+1} & , l = e^j + qm \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (q \in \mathbb{Z}), \quad (\alpha, \beta \in Y_1).$$

(6.13.) BEMERKUNG

Beispiel 2 zeigt, daß für $n > 1$ ein Extrempunkt $p \in P_e$ existiert, der nicht auf $\mathbb{N}_0^n$ multiplikativ ist.

(6.14.) LEMMA

Sind $m, l > 0$ und $G_m \cap G_l = \{0\}$, so gilt für alle $\alpha, \beta \in Y_1$

$$P_1^\alpha \cap P_m^\beta = \emptyset.$$

Beweis:

$\mathbb{R}^n$ sei mit der euklidischen Norm $\|\cdot\|$ versehen. Aus

$G_m \cap G_l = \{0\}$ folgt, daß $\inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \|m - \lambda l\| =: \delta > 0$ ist. Sei $q \in \mathbb{N}$ so

gewählt, daß $\|l\| < \delta q$ ist. Dann kann qm nicht im Streifen S_1

liegen: Andernfalls gäbe es ein $z \in \mathbb{Z}$ und ein $j \in [0, 1]$ mit

$qm=j+zl$, woraus

$\|l\| < \delta q = \inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \|qm - q\lambda l\| \leq \|qm - zl\| = \|j\| \leq \|l\|$ folgen würde.

Für $p \in P_m^\beta$ ist $|p(qm)|=1$, für $p \in P_1^\alpha$ jedoch $p(qm)=0$ nach (6.4.2.).

Daraus folgt die Behauptung./

Die Menge aller auf einer Geraden multiplikativen Extre-
malpunkte von P ist $\bigcup_{m>0} \bigcup_{\beta \in Y_1} (P_m^\beta)_e$ (vgl. 6.9.).

Im Falle $n=1$ ist $P_e = \bigcup_{\beta \in Y_1} (P_1^\beta)_e$; jeder Extre-
malpunkt ist

also auf der maximalen Geraden $G_1 = \mathbb{Z}$ multiplikativ.

Hingegen ist die entsprechende Aussage für $n>1$, daß ein auf
einer Geraden multiplikativer Extre-
malpunkt von P stets auf
einer maximalen Geraden multiplikativ sei, im allgemeinen
nicht richtig:

(6.15.) SATZ

Sei $n>1$ und $m \in \mathbb{N}_0^n$ nicht Vielfaches eines Einheits-
vektors. Dann gibt es zu jeder natürlichen Zahl $q>1$
eine extremale Funktion $p \in P_e$, die zwar auf G_{qm} ,
jedoch auf keiner der Geraden $G_m, \dots, G_{(q-1)m}, G_1$
mit $l>0$ und $G_1 \wedge G_{qm} = \{0\}$ multiplikativ ist.

Beweis:

Da m nicht Vielfaches eines Einheitsvektors ist, gibt es
zwei verschiedene Indizes i und k , so daß für die Kompo-
nenten von m gilt: $m_i, m_k > 0$. Sei e^i der i -te Einheitsvektor
und $j := qm_i e^i$. Dann ist $0 < j \leq qm$. Ferner gehört j zu keinem
der Streifen S_{tm} für $1 \leq t < q$. Um dies zu zeigen, sei ange-
nommen, daß es ein $t \in [1, q-1]$, ein $l \in [0, tm]$ sowie (da $j > 0$ ist)
ein $z \in \mathbb{N}_0$ gibt, so daß $j = l + ztm$ ist.

Dann ist $z > 0$, da sonst

$j_1 = 1_1 \leq t m_1 < q m_1$ im Widerspruch zu $j_1 = q m_1$ stünde.

Daher ist

$j_k = 1_k + z t m_k > 0$, was aber $j_k = 0$ widerspricht. Somit liegt j nicht in S_{tm} .

Sei nun $\beta \in Y_1$ und α so gewählt, daß $\alpha^2 = \beta$ gilt.

Die Funktion

$$r: x \mapsto 1 + \frac{\alpha}{2} x^j + \frac{\alpha}{2} x^{qm-j} \text{ liegt in } R_{qm}^\beta.$$

Da R_{qm}^β eine konvexe, kompakte Teilmenge eines endlich dimensionalen Vektorraumes ist, läßt sich nach einem Satz von Minkowski (vgl. Phelps [1]) jeder Punkt aus R_{qm}^β als endliche Konvexkombination von Extremalpunkten dieser Menge darstellen. Es gibt folglich einen Extremalpunkt $s \in (R_{qm}^\beta)_e$, so daß für den Koeffizienten s_j von s $|s_j| > |r_j| = \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$ gilt.

Das kanonische Bild p von s ist in P_{qm}^β extremal, also nach (6.9.) und (6.3.) extremal in P und multiplikativ auf G_{qm} , und es gilt $p(j) = \overline{s_j} \neq 0$ (2.8., 6.7.).

Nach (6.14.) ist p kein Element der Menge

$$\bigcup_{\alpha \in Y_1} \bigcup_{\substack{0 < l \in \mathbb{N}_0^n \\ G_1 \wedge G_{qm} = \{0\}}} P_1^\alpha.$$

Da $p(j) \neq 0$ und $j \notin S_{tm}$ für $1 \leq t < q$ ist, gilt nach (6.4.2.):

$$p \notin \bigcup_{\alpha \in Y_1} \bigcup_{1 \leq t < q} P_{tm}^\alpha. \text{ Daraus folgt die Behauptung. } \square$$

Es wäre nun interessant zu wissen, ob die beiden folgenden Fragen positiv entschieden werden können:

1. Lassen sich die Extremalpunkte der Mengen P_m^β ($m > 0$, $\beta \in Y_1$) (etwa wie im Beispiel (6.12.)) explizit bestimmen?

2. Ist jede extremale Funktion in P auf einer Geraden

G_m ($m > 0$) multiplikativ?

Die zweite Frage ist genau dann positiv zu beantworten, wenn jedes extremale Maß in M eine der äquivalenten Eigenschaften besitzt, die in (6.5.) aufgeführt sind, oder wenn jede extremale Funktion in F einen Koeffizienten vom Betrage 2 hat (vgl. 6.8.).

Ist jede Funktion in P_e auf einer Geraden multiplikativ, so gilt

$$P_e = \bigcup_{\beta \in Y_1} \bigcup_{0 < m \in \mathbb{N}_0^n} (P_m^\beta)_e \quad \text{und damit nach (6.7.)}$$

$$F_e = \bigcup_{\beta \in Y_1} \bigcup_{0 < m \in \mathbb{N}_0^n} (F_m^\beta)_e .$$

Insbesondere wäre dann jede extremale Funktion in F Bild eines Extrempunktes von B (nämlich einer Schrankenfunktion, vgl. 6.8.), und eine dem Fall einer Veränderlichen (4.7.) entsprechende Lösung des Koeffizientenproblems ließe sich aus (4.2.) erhalten.

Literaturverzeichnis

N.I.Akhiezer,

- [1] The classical moment problem. Edinburgh-London (1965).

H.Bauer,

- [1] Harmonische Räume und ihre Potentialtheorie.
Berlin-Heidelberg-New York (1966).
[2] Konvexität in topologischen Vektorräumen.
Vorlesungsausarbeitung, Hamburg (1964).
[3] Choquetscher Rand und Integraldarstellungen.
Jber.Deutsch.Math.-Verein.69 (1967), 89-104.

N.Bourbaki,

- [1] Espaces vectoriels topologiques, chap.1,2. Paris (1966).

R.S.Bucy, G.Maltese,

- [1] Extreme positive definite functions and Choquet's
representation theorem. J.Math.Anal.Appl.12 (1965),371-377.

C.Carathéodory,

- [1] Gesammelte Mathematische Schriften Bd.III, 54-77.
[2] - " - , 78-110.
München (1955).

H.Cartan,

- [1] Elementare Theorie der Analytischen Funktionen einer
oder mehrerer komplexen Veränderlichen. Mannheim (1966).

G.Choquet,

- [1] Le problème des moments. Séminaire Choquet 1961/62
(Initiation à l'Analyse), n° 4.

Ph.Courrège,

- [1] Théorie de la mesure. Paris (1966).

R.G.Douglas,

- [1] On extremal measures and subspace density.
Michigan Math.J.11 (1964), 243-246.

T.W.Gamelin, M.Voichick,

- [1] Extreme points in spaces of analytic functions.
Canad.J.Math.20 (1968), 919-928.

U.Grenander,

- [1] Probabilities on algebraic structures. Uppsala (1963).

R.C.Gunning, H.Rossi,

- [1] Analytic functions of several complex variables. Englewood Cliffs (1965).

G.Herglotz,

- [1] Über Potenzreihen mit positivem, reellen Teil im Einheitskreis. Ber.Sächs.Akad.Wiss.Leipzig, math.-phys.Kl.63 (1911), 501-511.

K.Hoffman,

- [1] Banach spaces of analytic functions. Englewood Cliffs (1962).

A.Korányi, L.Pukánszky,

- [1] Holomorphic functions with positive real part on polycylinders. Trans.Amer.Math.Soc.108 (1963), 449-456.

A Pfister,

- [1] Über das Koeffizientenproblem der beschränkten Funktionen von zwei Veränderlichen. Math.Ann.146 (1962), 249-262.

R.R.Phelps,

- [1] Lectures on Choquet's theorem. Princeton (1966).

F.Riesz,

- [1] Sur certains systèmes singuliers d'équations intégrales. Ann.Sci.Ecole Norm.Sup.Ser.III 28 (1911), 33-62.

W.Rudin,

- [1] Fourier analysis on groups. New York-London (1962).

J.Schur,

Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind.

- [1] J.Reine Angew.Math.147 (1917), 205-232.
- [2] J.Reine Angew.Math.148 (1918), 122-145.

J.A.Shohat, J.D.Tamarkin,

- [1] The problem of moments. Providence (1963).

E.Thoma, Invariante positiv definite Klassenfunktionen und

- [1] ergodische Maße. Math.Ann.162 (1965), 172-189.

Lebenslauf

Am 7. Dezember 1941 wurde ich als Sohn des Schiffbau-Ingenieurs Otto Anger und seiner Ehefrau Ingeborg, geb. Rüschler, in Wilhelmshaven geboren.

Nach meiner Einschulung zu Ostern 1948 in Wilhelmshaven wurde mein Vater mehrfach versetzt. In Bremerhaven besuchte ich ab 1954 das Körner-Gymnasium, in Hamburg von 1956 bis 1958 den mathematisch-naturwissenschaftlichen Zweig des Gymnasiums für Jungen in St. Georg. Die Reifeprüfung bestand ich zu Ostern 1961 am Max-Planck-Gymnasium in Wilhelmshaven.

Im Sommersemester 1961 begann ich das Studium der Mathematik an der Universität Hamburg. Ich hörte dort Vorlesungen der Professoren H. Bauer, L. Collatz und C. F. von Weizsäcker und legte im Sommersemester 1964 die Diplom-Vorprüfung ab. Vom Wintersemester 1965/66 an setzte ich mein Studium in Erlangen fort, wo ich im Februar 1967 die Diplom-Hauptprüfung für Mathematik bestand.

Bis zum Beginn des Sommersemesters 1967 war ich als studentische Hilfskraft am Mathematischen Institut der Universität beschäftigt. Seitdem bin ich Doktorand bei Herrn Prof. Dr. H. Bauer in Erlangen und Stipendiat der Stiftung Volkswagenwerk.

Offsetdruck-Fotodruck

J. Hogl, 8520 Erlangen Hauptstr. 109, (Nähe Martin-Luther-Platz) Tel. 22990
